24757

2822

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL III

ANUL 1923—1924.

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

TIMIȘOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1924.

: 24757

ANUL III. 15 MARTIE 1923. No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PRETUL UNUI NUMAR 5 LEI PRETUL ABONAMENULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. FUNCTIUNI PSEUDO-OMOGENE
2. NICOLAE CIORANESCU. UN MOD DE GENERARE A UNOR IDENTITATI DIN DETERMINANTI.
3. NOTE MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI

BIBLIOTECA „ASTRA"

TIMISOARA

Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

2451

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din următorii:

Abasohn Ernest, inginer, licenţiat în matematici, profesor la liceul Cantemir. Justinian 18, Bucureşti.

Abramescu N., doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Cluj.

Alaci Valeriu, doctor în matematici, profesor la Şcoala Politechnică Timişoara. Piaţa Doja 12, Timişoara.

Alexandrescu Elena, profesoară la externatul secundar de fete din Constanţa.

Angelescu A., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Anghelu̧a Th., doctor în matematici, profesor la Seminarul Pedagogic şi şcoala militară de geniu. Str. 13 Septembrie 173, Bucureşti

Balaban N., profesor liceul Carol I, Craiova.

Balaban Gh. profesor, liceul din Constanţa.

Banciu I., profesor. Str. Lucaci 95, Bucureşti.

Baron C., asistent la catedra de fizică la Şcoala Politechnîcă din Timişoara.

Botez Mihai, profesor la Şcoala Normală şi Liceul militar. Str. Speranţei 12, Iaşi.

Bratu Gh., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Breazu D., profesor la liceul din Caracal.

Buicliu Ch., locotenent-colonel în artilerie, director de studii la Şcoala specială a artileriei, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. B-dul Mihai-Bravul 5, Timişoara.

Cândea C., doctor-inginer, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. Palatul Timişana, Timişoara.

Caraman E., profesor la lIceul V. Alexandri. Str. Vultur 20, Galaţi.

Cârdeiu V., profesor la liceul Dragoş-Vodă. Câmpulungul mold. (Bucovina).

Cristescu I., inginer. Târgovişte.

Coman Aug., Directorul lic. C. Diaconovici-Loga. Feldioara 1, Timişoara.

Diaconescu Nic., profesor la lic. din Slatina.

Dumitrescu Gh., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Dumitriu Arad I., profesor la liceul Moise Nicoară. Str. Bucur 3, Arad.

Duţulescu Marin, licenţiat în matematici, inspector financiar. Str. Eminescu 20, Bucureşti.

Georgescu D-tru., profesor la liceul din Roşiorii-de-Vede. (Teleorman).

Ionescu K. C., profesor liceul real din Braşov.

Lalescu Traian, Doctor în matematici, profesor la Universitatea şi Şcoala Politechnică din Bucureşti, fost rector al Scoalei Politechnice din Timişoara, deputat. Gen. Anghelescu, 48, Bucureşti.

Liteanu Gh., maior în artilerie. Allea Sevastopol 27. Bucureşti.

Manughevici C., inginer chimist, şef de lucrări la Şcoala Politechnică din Timişoara. Str. Paul Chnezul 7, Timişoara.

Mardan D., inginer de mine, directorul fabricei de tutu, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. Fabrica d tutun, Timişoara.

Mihaly Elemer, profesor la liul Decebal. Deva.

Muzicescu N., profesor la lic l Traian. T.-Severin.

Nichifor G., doctor în matematici, conferenţiar la Universitat din Bucureşti, profesor secund, Str. Raco ă 32, Bucureşti.

Noaghea G., profesor la lic. n Caransebeş.

Oraşeanu Cezar, inginer, licenţiat matematici, profesor la Şcoa Politechnică Bucureşti. Ştirbei-Vo 45, Bucureşti.

Petrescu A., doctor în matem ci, profesor la Universitatea c Cluj.

Petricoane D. M., directorul liceului in Oravi̧a.

Roibanescu C., directorul liceului.-Vladimirescu. Tg.-Jiu.

Saegiu E., inginer, serviciul c tructii C. F. R. Str. Berze , Bucureşti.

Sergescu P., profesor la liceul ian. Rue Blai le 6, Paris.

Simniceanu Sava, directorul şcoalei male. Craiova.

Spineanu Cezar, profesor şi deputat târgovişte.

Stancescu C., doctor inginer, prof r la Şcoala Politechnică din i soara. Str. Bem imişoara.

Stefanescu C., chimist la Şcoala P chnică din Timişoara. Str. Mărăşeşti 6, imişoara.

Stoicescu M. G., profesor la liceul a raşov.

Sudan C., profesor la lic. Carten Bucureşti.

Teodorescu C. C., inginer, subdirectorul alei Politechnice Timişoara.

Tepeneag E., directorul Şcoalei con iale din Orşova.

Thierrin Gh., profesor, dir. Institutulu hew itz-Thierrin. Str. Scaune 33, Bucureşti.

Vâlcovici V., doctor în matematici, rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara. Rtr. Doja 33, Timişoara.

Vasiliu M., inginer în Ministerul Industriei, asistent la Şcoala Politechnică Bucureşti. Str. Dr. Obedenaru 10, Bucureşti.

Vlad I. V., inginer arhitect, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. Str. Bonnaz 20, Timişoara.

ANUL III. — No. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

FUNCȚIUNI PSEUDO-OMOGENE

V. ALACI

Vom studia o clasă de funcțiuni înrudite cu funcțiunile omogene, prin definiția și proprietățile lor apropiate și pe care le vom numi pentru aceasta, funcțiuni *pseudo-omogene*

Zicem că o funcțiune $f(x, y, z)$ *este pseudo-omogenă când avem identic,*

$$f(t^\alpha x,\ t^\beta y,\ t^\gamma z) = t^m f(x,\ y,\ z)$$

α, β, γ, m *fiind numere algebrice.*

Astfel de funcțiuni există, exemplu:

Funcțiunea,

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 - 2 x^3 z + 3 x y z + 4 z^3$$

este *pseudo-omogenă,* fiindcă înlocuind $x, y, z,$ prin $t x,\ t^2 y,\ t^3 z,$ avem:

$$f(t x,\ t^2 y,\ t^3 z) = t^6 f(x,\ y,\ z)$$

2. In caz când funcțiunea $f(x, y, z)$ este un polinom, iată cum putem controla dacă ea este *pseudo-omogenă.*

Fie,

$$(1)\quad f(x, y, z) = A_1 x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} + A_2 x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} + \ldots + A_n x^{a_n} y^{b_n} z^{c_n}$$

Inlocuind pe x, y, z respectiv cu $t^\alpha x,\ t^\beta y\ t^\gamma z$ și scriind că coeficientul lui t din fiecare monom este m, avem:

$$(2)\quad \begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 \gamma = m \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 \gamma = m \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n \alpha + b_n \beta + c_n \gamma = m \end{cases}$$

Dacă sistemul (2), — în care α, β, γ, m sunt necunoscute, — este compatibil, atunci afirmăm că polinomul dat este pseudo-omogen, fiindcă valorile aflate pentru necunoscute ne permite *a* scrie,

$$f(t^\alpha x,\ t^\beta y,\ t^\gamma z) = t^m f(x,\ y,\ z)$$

Mai observăm că putem construi un polinom *pseudo-omogen* de forma (1), dacă luăm a priori pe α, β, γ m și alegem numerile a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; $\ldots a_n, b_n, c_n,$ astfel ca sistemul (2) să fie compatibil.

Vom stabili acum o relațiune între o funcțiune *pseudo-omogene* și derivatele sale parțiale.

3. *Teoremă. Dacă* $f(x, y, z)$ *este o funcțiune pseudo-omogenă, adică dacă,*

$$(3)\quad f(t^\alpha x,\ t^\beta y,\ t^\gamma z) = t^m f(x,\ y,\ z)$$

atunci avem:

$$\alpha x f'_x + \beta y f'_y + \gamma z f'_z = m f(x,\ y,\ z)$$

Notând,

$$(4)\qquad u = t^\alpha x,\ v = t^\beta y,\ w = t^\gamma z$$

relațiunea (3) dată, devine:

$$(5)\qquad f(u, v, w) = t^m f(x,\ y,\ z)$$

Privind pentru un moment x, y, z ca având valori determinate și t ca singura variabilă independentă și derivând (5) în raport cu t, ținând seamă de (4), avem:

$$(6)\quad \alpha t^{\alpha-1} x f'_u + \beta t^{\beta-1} y f'_v + \gamma t^{\gamma-1} z f'_w = m t^{m-1} f(x,\ y,\ z).$$

Această egalitate având loc oricare ar ti valoa-

rea lui t, pentru $t=1$ devine observând că u, v, w, se reduce la x, y, z:

(7) $\alpha x f'_x + \beta y f'_y + \gamma z f'_z = m f(x, y, z)$-

ceiace era de dovedit.

Exemplu. Fie funcțiunea,

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 - 2 x^3 z + 3 x y z$$

care este *pseudo-omogenă* fiindcă,

$$f(t x, t^2 y, t^2 z) = t^6 f(x, y, z)$$

Conform teoremei demonstrate, avem:

$$x(2 x y - 6 x^2 z + 3 y z) + 2 y(2 x^2 y + 3 x z) +$$
$$3 z(-2 x^3 + 3 x y) = 6(x^2 y^2 - 2 x^3 z + 3 x y z),$$

ceiace ușor se verifică.

Obsrvare. In cazul particular $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $f(x, y, z)$ este omogenă m fiind gradul de omogenitate și relațiunea (7) stabilită devine:

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f(x, y, z),$$

care scrie tocmai teorema lui *Euler* relativ la funcțiile omogene.

4. Dacă luăm relațiunea (6) și o derivăm în raport cu t, avem:

$$(8)\ \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} x f'_u + \alpha t^{\alpha-1} x (f''_{u^2} \alpha t^{\alpha-1} x +$$
$$f''_{uv} \beta t^{\beta-1} y + f''_{uw} \gamma t^{\beta-1}) + \beta(\beta-1) t^{\beta-2} y f'_v +$$
$$\beta t^{\beta-1} y (f''_{uv} \alpha t^{\alpha-1} x + f''_{v^2} \beta t^{\beta-1} y + f''_{vw} \gamma t^{\gamma-1} z) +$$
$$\gamma(\gamma-1) t^{\gamma-2} z f'_w + \gamma t^{\gamma-1} z (f''_{uw} \alpha t^{\alpha-1} x +$$
$$f''_{vw} \beta t^{\beta-1} y + f''_{w^2} \gamma t^{\gamma-1} z) =$$
$$m(m-1) t^{m-2} f(x, y, z).$$

Pentru $t=1$ observăm că u, v, w se reduc la x, y, z așa că avem:

$$\alpha^2 x^2 f''_{x^2} + \beta^2 y^2 f''_{y^2} + \gamma^2 z^2 f''_{z^2} + 2\alpha\beta x y f''_{xy} +$$
$$2\alpha\gamma x z f''_{xz} + 2\beta\gamma y z f''_{yz} + \alpha(\alpha-1) x f'_x +$$
$$\beta(\beta-1) y f'_y + \gamma(\gamma-1) f'_z = m(m-1) f(x, y, z)$$

sau mai pe scurt:

$$(9)\qquad (\alpha x f'_x + \beta y f'_y + \gamma z f'_z)^{(2)} +$$
$$\alpha(\alpha-1) x f'_x + \beta(\beta-1) y f'_y + \gamma(\gamma-1) z f'_z =$$
$$m(m-1) f(x, y, z),$$

unde $(f')^2$ se va înlocui cu f''.

Relațiunea (9) stabilește astfel o relațiune între funcțiunea *pseudo-omogenă* $f(x, y, z)$ și derivatele sale parțiale de ordinul I și al II-lea

In cazul particular $\alpha = \beta = \gamma = 1$ (9), devine:

$$(x f'_x + y f'_y + z f'_z)^{(2)} = m(m-1) f(x, y, z),$$

care este tot o teoremă a lui *Euler*.

Observare. Dacă am deriva relațiunea (8) în raport cu t odată sau de mai multe ori, evident că am putea stabili relațiuni între funcțiunea *pseudo-omogeuă* $(f x, y, z)$ și derivatele sale parțiale de ordine superioare.

Cele expuse evident că se pot extinde la o funcțiune *pseudo-omogenă* de oricâte variabile.

UN MOD DE GENERARE A UNOR IDENTITAȚI DIN DETERMINANȚI

NICOLAE CIORANESCU
Student matematici

Intr'un număr precedent al revistei d-l Maior Octav. Bugeanu, a arătat modul cum se pot obține identități algebrice, prin desvoltarea unui aceluiaș determinant pe 2 sau mai multe căi, însă aceste desvoltări erau arbitrare,

Imi propun ca din o metodă generală de desvoltare a unui determinant să deduc o serie de identități algebrice. Se cunoaște desvoltarea unui determinant după minorii săi de ordinul I. Insă aceasta nu este decât un caz particular al unei desvoltări mai generale. Anume: un determinant se poate desvolta după minorii săi de ordinul p. (Vezi Salmont Algèbre Supèrieure). Astfel un determinant de ordinul n poate fi pus sub forma de sumă a produselor a unui determinant de ordinul p și complimentarul său de ordinul $n-p$. De ex, pentru $n=4$ avem:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

pe care îl însemn spre prescurtare astfel $(a_1\, b_2\, c_3\, d_4)$ avem următoarea desvoltare după minori de ord. II:

$$(a_1\, b_2\, c_3\, d_4) = (a_1\, b_2)\,(c_3\, d_4) + (a_1\, b_3)\,(c_4\, d_2) + (a_1\, b_4)\,(c_2\, d_3) + (a_3\, b_4)\,(c_1\, d_2) + (a_4\, b_2)\,(c_1\, d_3) + (a_2\, b_3)\,(c_1\, d_4)$$

In general numărul termenilor desvoltării unui determinant de ord. n după minori de ord. p este C_n^p.

Deci desvoltând un determinant, a cărui valoare se cunoaște dinainte, după modul de mai sus și egalând rezultatele, obținem o serie de identități.

Această metodă este foarte potrivită pentru determinanți de ordinul 4, 5 sau 6, minorii lor fiind luați de ordinul 2 sau 3.

Să aplicăm aceasta în câteva cazuri particulare:

1) Fie determinantul lui Vandermonde de ord. 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)\,(c-a)\,(d-a)\,(c-b)\,(d-b)\,(d-c)$$

Desvoltându-l ca în (1) obținem:

$$D = c^2 d^2\,(b-a)\,(d-c) + b^2 d^2\,(c-a)\,(b-d) + b^2 c^2\,(d-a)\,(c-b) + a^2 b^2\,(b-a)\,(d-c) + a^2 c^2\,(c-a)\,(b-d) + a^2 d^2\,(c-b)\,(d-a)$$

sau grupând avem identitatea:

$$(2)\qquad (b-a)\,(d-c)\,(a^2 b^2 + c^2 d^2) + (c-a)\,(b-d)\,(a^2 c^2 + b^2 d^2) + (c-b)\,(d-a)\,(b^2 c^2 + a^2 d^2) = (b-a)\,(c-a)\,(d-a)\,(c-b)\,(d-b)\,(d-c)$$

2) Desvoltarea determinantului, pe care îl însemn numai cu prima linie:

$$|\,1\ a\ a^2\ a^4\,| =$$

$$(b-a)\,(c-a)\,(d-a)\,(c-b)\,(d-b)\,(d-c)\,(a+b+c+d)$$

după metoda de mai sus, ne duce la identitatea:

$$(3)\ a^2 b^2\,(b^2-a^2)\,(d-c) + a^2 c^2\,(c^2-a^2)\,(b-d) + a^2 d^2\,(d^2-a^2)\,(c-b) + b^2 c^2\,(c^2-b^2)\,(d-a) + b^2 d^2\,(b^2-d^2)\,(c-a) + c^2 d^2\,(d^2-c^2)\,(b-a) = \mathrm{II}\,(b-a) \times (a+b+c+d)$$

$\mathrm{II}\,(b-a)$ însemnând valoarea determinantului

$$|\,1\ a\ a^2\ a^3\,|.$$

3. Este de asemeni cunoscută desvoltarea:

$$|\,1\ a\ a^2\ a^5\,| = \mathrm{II}\,(b-a) \times (a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Aplicând și acestui determinant aceiaș desvoltare avem:

$$(4)\ a^2 b^2\,(b^3-a^3)\,(d-c) + a^2 c^2\,(c^3-a^3)\,(b-d) + a^2 d^2\,(d^3-a^3)\,(c-b) + \ldots = (a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)\,\mathrm{II}\,(b-a).$$

4). Desvoltând determinantul Vandermonde de ord. V după aceiași metodă obținem o sumă de 10 termeni de formă:

$$(5)\ \Sigma a^2 b^2 c^2\,(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(d-c) = \mathrm{II}\,(b-a)$$

$\mathrm{II}\,(b-a)$ fiind valoarea cunoscută a determinantului de mai sus.

5) Fie determinantul:

$$\begin{vmatrix} -x & y & z & u \\ y & -x & u & z \\ z & u & -x & y \\ u & z & y & -x \end{vmatrix} = -$$

$$(-x+y+z+u)\,(x-y+z+u)\,(x+y-z+u)\,(x+y+z-u)$$

(Mansion Théorie des Détermin.)

Desvoltându-l ca la numărul (1) obținem identitatea:

$$2\,(xu+yz)^2 + 2\,(xz+yu)^2 - (x^2-y^2)^2 - (z^2-u^2)^2 = (-x+y+z+u)\,(x-y+z+u) \times (x+y-z+u)\,(x+y+z-u) \qquad (6)$$

6) Determinantul

$$\left| \sin^3\alpha \quad \sin^3\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha \quad \cos^2\alpha \quad \cos^3\alpha \right| =$$
$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)$$
$$\sin(\beta-\delta)\sin(\gamma-\delta)$$

căci calcularea lui se reduce la calcularea unui determinant Vandermonde.

Acest determinant ne furnizează identitatea:

$$\Sigma \sin^2\alpha \sin^2\beta \cos^2\gamma \cos^2\delta \sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta) =$$
$$(7) \qquad \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)\times$$
$$\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)\sin(\gamma-\delta)$$

Exemplele ar putea fi extinse oricât de mult. Ceace reese este că această metodă este foarte fructuoasă în generarea de identităţi cât mai variate.

NOTE MATEMATICE

Asupra funcţiunilor pseudo-omogene.

Vom arăta că funcţiunile *pseudo-omogene* definite în prezentul număr, sunt strâns legate de funcţiunile omogene, în sensul că dintr'o funcţiune omogenă putem deduce o funcţiune *pseudo-omogenă* şi invers.

Astfel dacă $f(u, v, w)$ este o funcţiune omogenă de gradul m, adică

$$(1) \qquad f(tu, tv, tw) = t^m f(u, v, w),$$

făcând schimbarea de variabile,

$$(2) \qquad u = x^\alpha, \quad v = y^\beta, \quad w = z^\gamma$$

noua funcţiune obţinută

$$(3) \qquad f(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma) = \Phi(x, y, z)$$

este *pseupo-omogenă.*

In adevăr efectuând în (1) substituţia (2), avem:

$$(4) \quad f(t x^\alpha, t y^\beta, t z^\gamma) = t^m f(x^\alpha, y^\beta, z^\gamma) = t^m \Phi(x, y, z)$$

De altă parte dacă în (3) înlocuim x, y, z prin $\overline{t^\alpha}x, \overline{t^\beta}y, \overline{t^\gamma}z$ *obţinem:*

$$(5) \quad f(t x^\alpha, t y^\beta, t z^\gamma) = \Phi\left(\overline{t^\alpha}x, \overline{t^\beta}y, \overline{t^\gamma}z\right)$$

Comparând relaţiunile (4) şi (5), deducem

$$(6) \quad \Phi\left(\overline{t^\alpha}x, \overline{t^\beta}y, \overline{t^\gamma}\right) = t^m \Phi(x, y, z),$$

ceiace arată că funcţiunea $\Phi(x, y, z)$ este *pseudo-omogenă.*

Invers plecând dela o funcţiune pseudo-omogenă $\Phi(x, y, z)$ definită de (6) şi făcând substituţia inversă, anume

$$x = u^{\overline{\alpha}}, \quad y = v^{\overline{\beta}}, \quad z = w^{\overline{\gamma}}$$

dedusă din (2), obţinem urmărind calea inversă funcţiunea omogenă $f(u, v, w)$. In virtutea acestei legături între *funcţiunile omogene* şi *pseudo-omogene*, rezultă că oricărei proprietăţi dela *funcţiunile omogene*, îi corespunde o proprietate la *funcţiunile pseudo-omogene.* Astfel teorema ce am stabilit'o direct în articolul *„Funcţiuni pseudo-omogene“* din prezentul număr, vom arăta cum se poate deduce din teorema lui *Euler* relativ la funcţiile omogene.

In adevăr dacă funcţiunea $f(u, v, w)$ este omogenă de gradul m, avem după teorema lui *Euler:*

$$(7) \quad u f'_u + v f'_v + w f'_w = m f(u, v, w)$$

Dacă facem schimbarea de variabile,

$$(8) \qquad u = x^\alpha, \quad v = y^\beta, \quad w = z^\gamma$$

şi dacă notăm

$$(9) \quad f(u, v, w) = f(x^\alpha, y^\gamma, z^\beta) = \Phi(x, y, z)$$

atunci am arătat că funcţiunea $\Phi(x, y, z)$ este pseudo-omogenă.

Derivăm acum relaţiunea (9) succesiv în raport cu x, y, z, observând că u, v, w sunt funcţiuni de x, y, z avem:

$$(10) \quad f'_u u'_x = \Phi'_x(x, y, z), \quad f'_v v'_y =$$
$$\Phi'_y(x, y, z), \quad f'_w w'_z = \Phi'_z(x, y, z)$$

Cum

$$u'_x = \alpha x^{\alpha-1}, \quad v'_y = \beta y^{\beta-1}, \quad w'_z = \gamma z^{\gamma-1},$$

din (10) deducem:

(11) $$f'_u = \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \Phi'_x,\ f'_v = \frac{1}{\beta y^{\beta-1}} \Phi'_y,$$

$$f'_w = \frac{1}{\gamma z^{\gamma-1}} \Phi'_z$$

Inlocuind în relaţiunea (7), $u, v, w, f'_u, f'_v, f'_w$, $f(u, v, w)$ cu valorile lor date de relaţiile (8), (11) şi (9), obţinem:

$$\frac{1}{\alpha} x \Phi'_x + \frac{1}{\beta} y \Phi'_y + \frac{1}{\gamma} z \Phi'_z = m \Phi (x, y, z)$$

Avem astfel stabilită teorema pentru funcţiunea pseudo-omogenă definită de (6), găsesc însă că e mai simplă demonstraţia dată direct în articolul menţionat.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate, anul II, No. 6, Februarie 1923. Les séries trigonométriques, de *Tr. Lalescu.* Asupra funcţiunilor algebrice, de *P. Sergescu.* O Generalizare a teoremei lui Rolle, de A. Proca,

*

Gazeta Matematică, Anul XXVIII. No. 6, Februarie 1923. O expresiune remarcabilă a câtului şi restului împărţirei a două polinoame. Condlţia de divizibilitate a două polinoame oarecare, de *Th. Angheluţă.*

Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului *„Vasile Conta"* pe intervalul 1 Iulie 1920 — 1 Iulie 1921.

PROBLEME REZOLVATE

134. — *Să se arate că condiţiunea ca polinomul* $x^n - m x^{n-1} - m x + 1$ *să fie divizibil prin* $x^3 - 1$ *este ca* $n = 3p + 1$, $m = 1$ *şi în acest caz să se afle câtul.*

MAIOR O. BUGEANU.

Pentruca $P(x) = x^n - m x^{n-1} - m x + 1$ să se dividă cu $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ trebuie ca să se dividă cu $x - 1$ şi cu $x^2 + x + 1$.

Pentru ca $P(x)$ să se dividă cu $x - 1$ trebuie ca $P(1) = 0$, adică,

$$1 - m - m + 1 = 0$$

$$m = 1.$$

$P(x)$ devine astfel:

$$x^n - x^{n-1} - x + 1 = x^{n-1}(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^{n-1} - 1)$$

şi avem succesiv:

$$\frac{(x-1)(x^{n-1}-1)}{x^3-1} = \frac{x^{n-1}-1}{x^2+x+1} = \frac{(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)}{x^2+x+1}$$

Rămâne încă a determina pe n astfel ca polinomul $x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1$ să se dividă cu $x^2 + x + 1$.

Dacă însemnăm prin $Q(x)$ câtul împărţirei lor, trebue să avem identic:

(1) $$x^{n-2} + x^{n-1} + \ldots + x + 1 \equiv Q(x)(x^2 + x^2 + 1)$$

Pentru $x = 1$ deducem, $n - 1 = 3p$, p fiind un număr întreg, anume valoarea lui $Q(x)$ pentru $x = 1$.

De aici rezultă că e necesar ca

$$n = 3p + 1.$$

Această condiţie e şi suficientă, fiindcă putem afla imediat câtul $Q(x)$.

In adevăr, în acest caz în (1) avem $3p$ termeni şi deci îi putem grupa câte trei astfel:

$$(x^{3p-1} + x^{3p-2} + x^{3p-3}) + (x^{3p-4} + x^{3p-5} + x^{3p-6}) + \ldots + (x^2 + x + 1) \equiv Q(x).(x^2 + x + 1)$$

$$x^{3p-3}(x^2 + x + 1) + x^{3p-6}(x^2 + x + 1) + \ldots + (x^2 + x + 1) \equiv Q(x).(x^2 + x + 1)$$

$$(x^2 + x + 1)(x^{3p-3} + x^{3p-6} + x^{3p-9} + \ldots + x^3 + 1) \equiv Q(x).(x^2 + x + 1).$$

Simplificând cu $x^2 + x + 1$, rezultă că,

$$Q(x) = x^{3p-3} + x^{3p-6} + x^{3p-9} + \ldots + x^3 + 1,$$

iar câtul cerut este:

$$(x-1)(x^{3p-3}+x^{3p-6}+x^{3p-9}+\ldots+x^3+1).$$

Au dat soluțiuni bune d-nii: *Berdan I. C.* (lic. Bârlad), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *Iordache N. Ioan*, *Mehlmann Theodor* (Câmpulung Bucovina), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Bercovici E.*, *Dospinoiu I.*, *Septilici Raul* și *Weiss Leon.*

Soluțiuni parțiale sau simple verificări sau primit dela d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Atanasiu D-tru* (Huși), *Cocorandu M.* (Brașov), *Coșereanu Ioan* (Timișoara), *Dobrescu-Băbici*, *Dragomir N. Ioan* (București), *Dumitrescu G. Marin* (Craiova), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu). *Gabrielescu Vasile* (Brăila), *I. N. Georgescu-Val* (Călărași), *Gogălniceanu M. Mihai* (Brăila), *Goilav Cristea* (Tecuci), *Iliescu E.*, *Katz Pincu* (Galați)î *Lăzărescu Th. Jean* (Pitești), *Lăzărescu F. Șt.* (Giurgiu), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mihăescu C. C-tin* (Giurgiu), *Negretzu Florea* (Pitești), *Neștianu Gh. Oheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Niculescu Alexandru* (București), *Pamula Alexandru* (Botoșani), *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), *Popovici Tiberiu* (Arad), *Răuț C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Solomon Wilhelm* (București), *Ștefănescu Emil* (București), *Stoenescu Al. I.* (București), *Teodorescu St. I.* (Ploești), *Teodoru Nicuță* (Huși), *Ulman Octav* (Timișoara), și *Vicoveanu C. V.*

Observări. Merită să relevăm cum d-l *Georgescu Er. Elorian* a determinat pe n astfel ca $x^{n-1}-1$ să fie divizibil cu x^2+x+1.

D-sa caută resturile puterilor lui x prin x^2+x+1 și găsește:

$$x = M(x^2+x+1)+x$$
$$x^2 = M(x^2+x+1)-(x+1)$$
$$x^3 = M(x^2+x+1)+1$$
$$x^4 = M(x^2+x+1)+x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{M3+1} = M(x^2+x+1)+x$$
$$x^{M3+1} = M(x^2+x+1)-(x+1)$$
$$x^{M3} = M(x^2+x+1)+1.$$

Rezultă deci că,

$$x^{n-1}-1 = M(x^2+x+1)$$

când: $n-1 = M3$ sau $n = M3+1$ sau $n = 3p+1$,

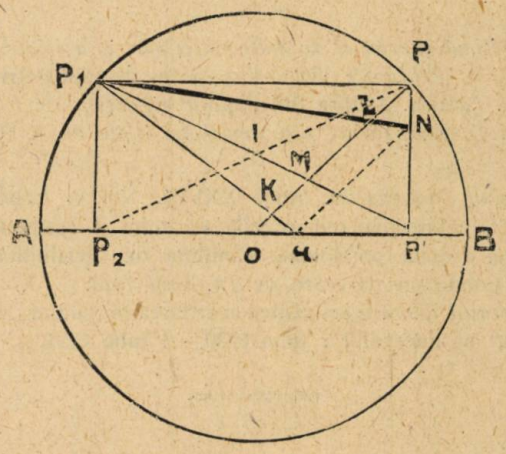
2). D-l *Stoenescu Al. I.* (lic. Cantemir, București), a dat o generalizare problemei stabilind că polinomul $x^n - mx^{n-1} - mx + 1$ este divizibil cu $x^p - 1$, când $m = 1$ și $n = p.q+1$, dar demonstrația dată nu este suficientă fiindcă se întemeiază pe un exercițiu din (Traité d'Algèbre, par Bertrand, page 55), care este enunțat numai, nu și stabilit.

V. A.

148. — *Se consideră un punct* P *mobil pe cercul* O, *care are proecția sa în* P′ *pe diametrul fix* AB. *Se duce* PP_1 *paralelă la* AB, *care taie cercul în* P_1. *Cari sunt locurile geometrice descrise de intersecțiile dreptei* OP *cu dreptele* P_1N *și* P_1Q; N *și* Q *fiind două puncte cari impart respectiv segmentele* PP′ *și* OP′ *într'un același raport.*

I. M. ȘERBANESCU

Soluție dată de propunătorul problemei. Locul punctului L, *intersecția dreptelor* OP *și* P_1N. Fie M intersecția lui OP cu P_1P', P_2 proecția lui P_1 pe AB și I intersecția lui PP_2 cu P_1P'



Prin ipoteză,

$$(1)\quad \frac{PN}{NP'} = \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b}$ fiind raportul dat.

Triunghiul MPP′ tăiat de transversala P_1N, dă

$$(2)\quad P_1P' \times LM \times NP = P_1M \times LP \times NP'.$$

Observăm însă că,

$$P_1M = IP_1 + IM$$

Dar $IP_1 = \frac{PP'}{2}$, figura PP_1P_2P' fiind un dreptunghic, iar $IM = \frac{IP'}{3} = \frac{P_1P'}{6}$ fiindcă dreptele OP și IP' sunt mediane în triunghiul PP_2P'.

Atunci,

$$P_1M = \frac{PP'}{2} + \frac{PP'}{6} = \frac{2}{3} \cdot P_1P'.$$

Din (1),

$$NP' = \frac{b}{a} NP.$$

Inlocuind în (2) valoriie aflate pentru P_1M și NP' și simplificând deducem

$$LM = \frac{2b}{3a} LP \text{ sau } LP = \frac{3a}{2b} LM$$

Dar,

$$LM + LP = MP = \frac{2}{3} OP$$

fiindcă M este punctul de întâlnire al medianelor triunghiului PP_2P', deci

$$LM + \frac{3a}{2b} LM = \frac{2}{3} OP$$

$$^{*}_{**} \quad LM = \frac{4b}{9a + 6b} OP$$

și atunci,

$$OL = OM + LM = \frac{OP}{3} + \frac{4b}{9a + 6b} UP = \frac{2b + a}{2b + 3a} OP.$$

Locul lui L este astfel un cerc cu centru în O de rază $\frac{2b + a}{2b + 3a} OP$.

Discuție. Punctul N poate fi în interiorul sau exteriorul segmentului PP'.

1°. Dacă N este în interiorul lui PP', raza OL este

$$\frac{2b + a}{2b + 3a} OP.$$

2°. Dacă N este în exteriorul lui PP' și dacă

a) $\frac{a}{b} > 1$, raza OL este $\frac{2b - a}{3a - 2b} OP$

b) $\frac{a}{b} < 1$, raza OL este $\frac{2b - a}{2b - 3a} OP$.

Locul punctului K *intersecția lui* OP *cu* P_1Q.

Prin ipoteză $\frac{OQ}{QP'} = \frac{a}{b}$.

Transversala P_1Q în triunghiul OMP' dă:

(3) $P_1P' \times KM \times QO = P_1M \times KO \times QP'$

Insă,

$$P_1M = \frac{2}{3} P_1P', \quad QP' = \frac{b}{a} QO,$$

care înlocuite în (3) ne dă:

$$KM = \frac{2b}{3a} KO.$$

Dar,

$$OM = OK + KM = \frac{2b + 3a}{3a} OK = \frac{1}{3} OP$$

$$^{*}_{**} \quad OK = \frac{a}{2b + 3a} OP.$$

Locul punctului K este un cerc cu centrul în O de rază, $\frac{a}{2b + 3a} OP$.

Discuție. 1°. Dacă Q este în interiorul lui OP', atunci

$$OK = \frac{a}{2b + 3a} OP.$$

2°. Dacă Q este în exteriorul lui OP', și

a) $\frac{a}{b} > 1$, $OK = \frac{a}{3a - 2b} OP$

b) $\frac{a}{b} = 1$, $OK = \frac{a}{2b - 3a} OP$.

Observare. Rapoartele date evident că pot fi și neegale, adică,

$$\frac{PN}{NP'} \neq \frac{OQ}{QP'},$$

fără a se modifica forma locurilor geometrice cerute,

Soluție geometrică dată de d-nii: *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Focşeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (Giurgiu), *Georgescu T.* (lic. Ploești), *Ghițescu Virgiliu* (lic. Mihai-Viteazul București), *Măru Dumitru* (lic. Galați), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad) și *Vasilescu C. Virgil, Bercovici, E., Pitea I. D-tra* și *Gheorgiu Gh. Lucian.*

Locul punctulsi K. Prin ipoteză

$$\frac{OQ}{QP'}=\lambda \quad \text{sau} \quad \frac{OQ}{OP'}=\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

Din triunghiurile asemenea KOQ și KP_1P deducem:

$$\frac{OK}{KP}=\frac{OQ}{P_1P}=\frac{OQ}{2OP'}=\frac{\lambda}{2\lambda+2}$$

$$\overset{*}{**}\quad \frac{OK}{OP}=\frac{\lambda}{3\lambda+2}$$

de unde,

$$OK=\frac{\lambda}{3\lambda+2}OP.$$

Locul punctului K este un cerc concentric cu O și de rază,

$$\frac{\lambda}{3\lambda+2}OP.$$

Locul punctutui L. Prin ipoteză

$$\frac{PN}{NP'}=\lambda \quad \text{sau} \quad \frac{PP'}{NP'}=\lambda+1$$

Din triunghiurile asemenea $P'QN$ și $P'OP$, deducem

$$\frac{NQ}{OP}=\frac{NP'}{PP'}=\frac{1}{\lambda+1}$$

$$\overset{*}{**}\quad NQ=\frac{1}{\lambda+1}OP$$

Triunghiurile P_1NQ și P_1LK fiind și ele asemenea deducem

$$\frac{QN}{KL}=\frac{P_1Q}{P_1K}$$

$$\overset{*}{**}\quad KL=QN\frac{P_1K}{P_1Q}=\frac{OP}{\lambda+1}\cdot\frac{P_1K}{P_1Q}$$

Dar,

$$\frac{P_1K}{KQ}=\frac{P_1P}{OQ}=\frac{2OP'}{OQ}=\frac{2\lambda+1}{\lambda}$$

$$\overset{*}{**}\quad \frac{P_1K}{P_1Q}=\frac{2\lambda+2}{3\lambda+2}$$

Atunci,

$$KL=\frac{OP}{\lambda+1}\cdot\frac{2\lambda+2}{3\lambda+2}=\frac{2}{3\lambda+2}OP.$$

Acum observăm că:

$$OL=OK+KL=\frac{\lambda}{3\lambda+2}OP+\frac{2}{3\lambda+2}OP=\frac{\lambda+2}{3\lambda+2}OP.$$

Locul punctului L este un cerc concentric cu O de rază,

$$\frac{\lambda+2}{3\lambda+2}OP.$$

Discuție, ca la prima soluție.

Soluție analitică dată de d-nii: *Coşereanu Ion* (Timișoara), *Cristescu Vasile* (Pitești), *I. N. Georgescu-Val* (Călărași), *Oprişan G. Ernest* (Bârlad), *Popeanu G. A., Popovici Siberiu* (Arad), *Timotin D-tru* (Oradea-Mare), *Stănescu D-tru* (lic. Galați), *Vasilescu C. Virgil.*

Alegem AB ca axă de x și o perpendiculară pe ea în punctul O ca axă de y.

Prin ipoteză,

$$\frac{PN}{NP'}=\frac{OQ}{QP}=\lambda$$

Fie (α, β), coordonatele lui P, atunci coordonatele punctelor P_1, N, Q sunt:

$$P_1(-\alpha, \beta),\ N\left(\alpha, \frac{\beta}{1+\lambda}\right),\ Q\left(\frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}, 0\right)$$

Ecuațiile dreptelor OP, P_1N și P_1Q sunt respectiv:

$$(1)\qquad y=\frac{\beta}{\alpha}x,\quad (2)\qquad \frac{y-\beta}{\frac{\beta}{1+\lambda}-\beta}=\frac{x-\alpha}{2\alpha},$$

$$(3)\quad y=\beta\,\frac{x-\frac{\lambda\alpha}{\lambda+1}}{-\alpha-\frac{\lambda\alpha}{1+1}}$$

Locul punctului L. Pentru aceasta eliminăm pe α și β între ecuațiile (1) și (2), și

$$(4)\qquad \alpha^2+\beta^2=r^2$$

punctul $P(\alpha_1\,\beta)$ fiind pe cercul O de rază r.

Din (1) deducem,

$$\beta=\frac{\alpha y}{x}$$

care introdus în (2) ne dă:

$$\frac{\left(y-\frac{\alpha y}{x}\right)(1+\lambda)}{-\frac{\alpha y}{x}\lambda}=\frac{x+\alpha}{2\alpha}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \frac{\alpha-x}{\lambda}=\frac{x+\alpha}{2\lambda=2}=\frac{2x}{\lambda+2}$$

sau,

$$\alpha=\frac{(3\lambda+2)x}{\lambda+2}\quad\text{și deci}\quad \beta=\frac{(3\lambda+2)y}{\lambda+2}$$

Introducând aceste valori în (4), găsim:

$$x^2+y^2=\left(\frac{\lambda+2}{3\lambda+2}r\right)^2$$

Locul punctului L este un cerc concentric cu O de rază $\frac{\lambda+2}{3\lambda+2}x$.

Locul punctului K. Eliminăm α și β între ecuațiile (1), (3) și (4).

Egalând membri al doilea din (1) și (3), și simplificând, avem:

$$\frac{\beta x}{\alpha}=\beta\frac{\lambda\alpha-\lambda x-x}{2\lambda\alpha+\alpha}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad x=\frac{\lambda\alpha}{2\lambda+1}-\frac{\lambda x+x}{2\lambda+1}$$

de unde

$$\alpha=\frac{(3\lambda+2)x}{\lambda}$$

și deci,

$$\beta=\frac{(3\lambda+2)y}{\lambda}$$

Introducând aceste valori în (4), găsim:

$$x^2+y^2=\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2}r\right)^2$$

Locul punctului L este un cerc concentric cu O de rază $\frac{\lambda}{3\lambda+2}r$.

Observări. 1) D-nii *I. N. Georgescu-Val* și *Popeanu G. A.* au observat că problema se poate extinde și la elipsă, iperbolă și parabolă, ecuația (4) a cercului înlocuindu-se cu a curbelor corespunzătoare, astfel:

In cazul elipsei,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

locurile lui L și K sunt elipsele

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{\lambda+2}{3\lambda+2}\right)^2\quad\text{și}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2}\right)^2$$

In cazul iperbolei,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

locurile lui L și K sunt iperbolele:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{\lambda-2}{3\lambda+2}\right)^2\quad\text{și}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2}\right)^2$$

In cazul parabolei

$$y^2=2px,$$

locurile lui L și K suot parabolele:

$$y^2=2p\left(\frac{\lambda+2}{3\lambda+2}\right)x\quad\text{și}\quad y^2=2p\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2}\right)x$$

2). D-nii *Buşilă A. Ădrian* și *I. N. Georgescu-Val* au observat că această problemă generalizează problema 5 propusă de d-l Sarian în „R. M. T.“ No. 5.

3) S'au primit încă două soluțiuni în care se afirmă că locurile sunt niște cercuri concentrice fără nici o justificare, de aceia nici nu le menționăm.

V. A.

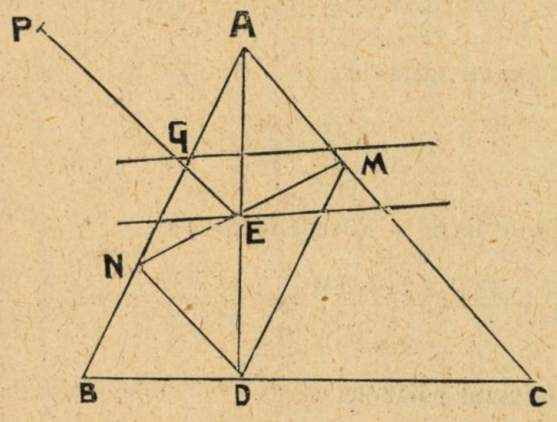
153. — *Se împart laturile* C A, A B *ale unui triunghiu* A B C, *în acelaș sens, în același raport* K *prin punctele* M, N. *Dacă* P *e un punct fix al planului, care e locul centrului de greutate al triunghiului* M N P, *când* K *variază.*

MIRON NICULESCU

Ducând prin M și N paralele la A B și A C, evident că acestea se vor tăia într'un punct D de pe B C căci fiecare din ele împarte pe B C în același raport, fiindcă

$$\frac{CM}{MA}=\frac{AN}{NB}=\frac{CD}{BD}$$

Figura A M D N este și rămâne un paralelogram când K variază.



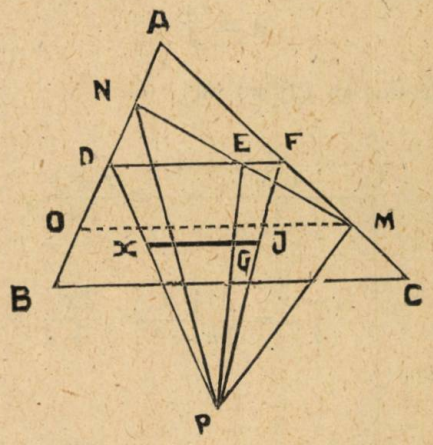
Punctul E este astfel intersecția diagonalelor A D și M N, deci este mijlocul lui A D. Punctul A fiind fix și D mișcându-se pe B C, punctul E mijlocul lui A D va descrie o dreaptă paralelă cu B C. Centrul de greutate G al triunghiului M N P fiind pe P E și astfel ca,

$$\frac{EG}{GP}=\frac{1}{2}$$

și punctul E descriind o paralelă la B C, rezultă că și G va descrie un loc omotetic, adică tot o paralelă la B C.

Soluție geometrică dată de d-l *Katz Pincu.* Galați.

Fie M punctul, care împarte pe C A, în raportul K. Ca să găsim punctul N care împarte în același sens și în același raport pe A B, din M ducem o paralelă la B C. Segmentul O B astfel determinat îl așezăm din A, pe A B și obținem punctul N căutat. G centrul de greutate al triunghiului



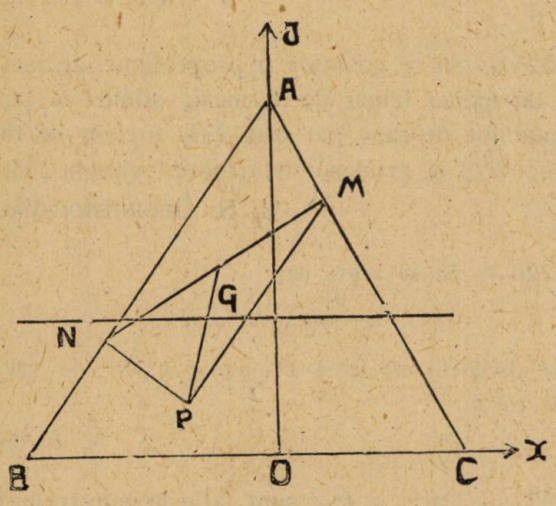
M N P se află la $\frac{2}{3}$ de P, pe mediana P E. Trebue să căutăm deci locul lui E. Punctul G fiind omotetic cu E în raport cu centrul de omotetie, locul său va fi omotetic cu locul lui C, în raport cu P, raportul de omotetie fiind $\frac{PG}{PE}=\frac{2}{3}$.

Prin E, mijlocul lui M N, ducem o paralelă D F, la O M. D va fi deci mijlocul lui O N. Din construcție avem: A N = B O. Deci D este și mijlocul lui A B. D F fiind paralelă cu B C, F va fi mijlocul lui A C. Locul lui E este deci dreapta D F, care unește mijloacele laturilor A B și A C. Locul lui G. cum am mai spus, va fi omotetica dreptei D F, în raport cu centrul de omotetie P, în raportul $\frac{2}{3}$ adică $x\,y$.

Soluție analitică dată de d-nii: *Coșeraanu Ioan* (Timișoara), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Popeanu A.* (lic. Constanța), *Popovici Tiberiu* (Arad), și *Stoenescu I. Alexandru* (București), *Mircea Adam* și *Vasilescu C. Virgil.*

Să luăm ca axe pe BC și AO. Punctele A, B, C, P fiind fixe, însemnăm astfel coordonatele lor

$$A(o, a),\ B(b, o),\ C(c, o),\ P(p, q).$$



Având,

$$\frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} = k,$$

rezultă că coordonatele punctelor M și N sunt:

$$M\left(\frac{c}{1+k},\ \frac{ak}{1+k}\right),\quad N\left(\frac{bk}{1+k},\ \frac{a}{1+k}\right)$$

Rezultă că coordonatele centrului de greutate G, sunt:

$$G\left(\frac{c+p+k(b+p)}{3(1+k)},\ \frac{a+q}{3}\right)$$

Deci locul lui G este dreapta

$$y = \frac{a+q}{3}$$

care evident este paralelă cu BC.

Generalizare dată de d-l *Schileru C. Dili. Se împart laturile* A_1A_2, $A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ *ale unui poligon de n laturi în același sens, în raportul k, respectiv prin punctele* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$. *Dacă P este un punct al planului, care este locul geometric al centrului de gravitate al poligonului* $A'_1A'_2 \ldots A'_{n-1}P$ *când k variază?*

Fie (x_1, y_1); (x_2, y_2); $\ldots (x_n, y_n)$, (a, b) coordonatele carteziene ale vârfurilor $A_1, A_2, \ldots A_n$ și ale punctului P.

Coordonatele punctelor $A'_1, A'_2 \ldots A'_{n-1}$ vor fi respectiv.

$$A'_1\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k},\ \frac{y_1+ky_2}{1+k}\right),\ A'_2\left(\frac{x_2+kx_3}{1+k},\ \frac{y_2+ky_3}{1+k}\right)$$

$$\ldots A'_{n-1}\left(\frac{x_{n-1}+kx_n}{1+k},\ \frac{y_{n-1}+ky_n}{1+k}\right)$$

Coordonatele centrului de greutate al poligonului $A'_1A'_2 \ldots A'_{1-1}P$ vor fi

$$x = \frac{a+\frac{x_1+kx_2}{1+k}+\frac{x_2+kx_3}{1-k}+\ldots+\frac{x_{n-1}+kx_n}{1+k}}{3}$$

$$y = \frac{b+\frac{y_1+ky_2}{1+k}+\frac{y_2+ky_3}{1+k}+\ldots+\frac{y_{n-1}+ky_n}{1+k}}{3}$$

Eliminând k, ecuația locului căutat este:

$$\frac{a-3x+\sum_{i=1}^{n-1}x_i}{3x-a-\sum_{i=1}^{n-1}x_i} = \frac{b-3y+\sum_{i=1}^{n=1}y_i}{3y-b-\sum_{i=1}^{n-1}y_i}$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor găsim:

$$\frac{a-3x+\sum_{i=1}^{n-1}x_i}{x_n} = \frac{b-3y+\sum_{i=1}^{i-1}y_i}{y_n}$$

Locul căutat este prin urmare o dreaptă de coeficientul unghiurilor $\frac{y_n}{x_n}$.

Cum coeficientul unghiurilor al dreptei A_1A_n este

$$\frac{y_n-y_1}{x_n-x_1}$$

și cum $\frac{y_n}{x_n} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_n-y_1}{x_n-x_1}$ fiindcă punctele A_1 și A_n sunt pe dreapta A_1A_3, rezultă că dreapta loc geometric este paralelă cu A_1A_n.

Observări. 1) D-nii: *Oprișeanu Ernest* (Bârlad), *Scodreanu Alex.* (Durostor), *Teodorescu St. I.* (Ploești), și *Vasilescu C. Virgil* (Ploești), au inter-

pretat greșit enunțul, în sensul că au luat M N paralelă cu B C. Evident că și în acest caz problema are sens și locul căutat este tot o dreaptă paralelă la mediana dusă din A a triunghiului A B C, dar problema este mult mai simplă astfel.

2) D-l *Stoenescu I. Alexandru* (București) a demonstrat că chiar dacă punctul P ar fi exterior planului triunghiului A B C, locul geometric cerut ar fi tot o dreaptă paralelă cu C B.

3) S'au primit și trei soluțiuni insuficiente întrucât s'au particularizat prea mult datele problemei.

V. A.

PROBLEME PROPUSE

220. — Să se găsească un patrat perfect de 4 cifre $a\,b\,c\,d$, astfel ca numărul de 3 cifre $a\,b\,c$ să fie patrat perfect și format din cifre consecutive, de asemenea și numerile $c\,d$ și d să fie patrate perfecte.

EMIL STEFANESCU

221. — Două numere sunt reprezentate într'un sistem cu bază necunoscută, prin 2501 și 302, iar în baza 7 cu sistemul produsul lor este reprezentat prin 10810. Să se afle baza necunoscută.

I. N. GEORGESCU-VAL

222. — Se dă un pentagon stelat înscris într'un cerc de rază R. Laturile acestui pentagon, se întretaie, formând un pentagon convex, pe ale cărui laturi, ca diametre, descrim în afară semicercuri. Să se afle numai în funcție de R, suprafața cuprinsă între cercul dat și acest ornament.

KATZ PINCU

223. — Fie A', B', C', picioarele înălțimilor triunghiului A B C și A'', B'' proecțiile lui B' pe B C și A B. Să se demonstreze relația:

$$\frac{B'A''}{AA'}+\frac{B'C''}{CC}=1.$$

EMIL ȘTEFANESCU

224. — O sferă și un cub au același volum. 1) Se taie sfera drept în două și cubul după planul diagonal; dintre suprafețele obținute care va fi mai mare? 2) Dacă cubul n'ar fi tăiat diagonal, ci paralel cu una din fețe, cum ar fi fost suprafețele?

LT. I. I INTES

225. — Să se găsească o progresiune aritmetică cu un număr impar de termeni, știind că suma terminilor de rang par este 234, a celor de rang impar 273 și produsul termenilor extremi 235.

I. N. GEORGESCU-VAL

226. — Să se arate că,

$$x^{10p}+x^{5p}-2$$

este divizibil cu $x^4+x^3+x^2+x+1$, și să se afle câtul.

V. ALACI

227. — Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu oarecare, să se arate că avem relațiunea:

$$(a+b+c)(ab+bc+ac)>9\,a\,.\,b\,.\,c.$$

IONESCU I. BREZUICA

228. — Să se afle limita expresiunei,

$$E=\left[1+x-\log(1-\sin x)\right]^{\frac{1}{x}}$$

pentru $x=0$. Să se dea o soluție fără a întrebuința derivatele.

T. POPOVICI.

229. — Să se verifice egalitatea:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{(a-b)(a-2\sqrt{2}\,ab+b)}{2ab(1-a\sqrt{2})(1-b\sqrt{2})}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{b(1-a\sqrt{2})}{a(1-b\sqrt{2})}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

I. STOENESCU

230. — O placă circulară de rază R și de greutate 30 kg. este rezemată în trei puncte de pe cerc formând vârfurile unui triunghiu echilateral. Unde trebue să punem pe placă o greutate de 40 kg., pentruca aceasta să se răstoarne?

C. C. TEODORESCU.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Abonamentul pe anul III-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZECI) LEI

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Subdirectorul Şcoalei Politecnice

Timişoara.

Incepând cu anul acesta nu vom mai publica decât soluţiile abonaţilor noştri, aşa încât numai acestea vor apare în paginile revistei. Soluţiile vor trebui semnate cu numele complet, clasa şi liceul, de ex. *Stoenescu I. Alex.*, întru cât se poate să existe şi un *Stoenescu A. Ion*, dedesubt trebue scris liceul de unde este pentruca astfel să se poată distinge unul de altul.

Nu putem da curs dorinţei exprimată de mai mulţi corespondenţi de a se publica pe copertă numele celor ce au trimis soluţii. Aceasta din cauză că numărul membrilor ce se ocupă cu repartizarea soluţiilor fiind mic, nu se pot clasa toate soluţiile ci numai acelea ce vin publicate în numărul următor.

Rugăm pe toţi corespondenţii care cer informaţiuni să adaoge mărci pentru răspuns. Nu se va putea da curs nici unei cereri care nu poartă mărci pentru răspuns. Faţă de taxele poştale ridicate, corespondenţa aceasta ne-ar costa prea mult.

De asemenea nu vom mai putea înlocui numerile pierdute cu poşta, de cât contra costului de 5 lei. Dacă corespondenţii noştri nu îşi dau adresa exactă, sau dacă poşta pierde revista nu vom putea suporta aceste cheltueli care, faţă de costul mare de tipărire, este foarte ridicat. Pe anul trecut, din cauza trimiterei de numere răzleţe, s'au descompletat 300 volume care legate s'ar fi putut pune la dispoziţia amatorilor cu 50 lei, deci o perdere de 15000 lei.

Rugăm de aceia pe toţi corespondenţii noştri să-şi dea adresa exactă, strada şi numărul, şi să anunţe din vreme orice schimbare de adresă.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 APRILIE 1923 NO. 2

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PERTUL UNUI NUMAR 5 LEI PRETUL ABONAMENULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. ALEXANDRU NICULESCU CATEVA PROPRIETATI IN LEGATURA CU ORTOCENTRU.
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. CHESTIUNI DE EXAMEN.
5. PROBLEME REZOLVATE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că dela 1 Aprilie, fac parte din comitetul de redacție al Revistei și d-nii:

Dumitrescu I. Gh., profesor la liceul militar M-rea Dealu Târgoviște.

Orășeanu Grig., profesor la liceul Sf. Petru și Pavel Ploești.

Purcariu Ilie, Director general în Ministerul Instrucției.

de asemenea din eroare s'a omis a se trece pe lista membrilor d-l

Zapan Grigore, Căpitan de artilerie, Inginer hotarnic, profesor la liceul Mihai-Viteazul, Tg.-Mureș.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL III. — No. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

CATEVA PROPRIETAȚI IN LEGATURA CU ORTOCENTRU.

ALEXANDRU NICULESCU
Elev cl. VIII R.
Liceul „Matei-Basarab

Considerăm un triunghiu ABC ca Δ de referință și notăm $\Delta(A_1 B_1 C_1)$ triunghiul complimentar, iar $\Delta(H_a H_b H_c)$ triunghiul ortic. Fie H, O, G ortocentrul, centrul cercului circumscris și baricentrul.

1) *Dreptele* $A_1 A$, $B_1 B'$, $C_1 C'$ *sunt concurente într'un punct* S — *simetricul ortocentrului față de centrul cercului circumscris.*

Fie S' punctul unde $A' A_1$ taie dreapta lui Euler relativ la triunghiul ABC, din asemănarea triunghiurilor $S'O A_1$ și SHA' scoatem:

$$\frac{S'O}{S'H} = \frac{OA_1}{HA'}$$

dar: $OA_1 = \frac{AH}{2} = \frac{A'H}{2}$ și deci $\frac{S'O}{S'H} = \frac{1}{2}$

adică S' se confundă cu simetricul lui H față de O. In mod analog se stabilește și pentru dreptele $B_1 B'$, $C_1 C'$. Această proprietate se poate demonstra pe cale indirectă cu ajutorul reciprocei teoremei lui Menelaus, considerând ΔAHG și scriind condiția de colinearitate a punctelor A', A_1, S.

2). A_2, B_2, C_2 *fiind mijloacele segmentelor* AS, BS, CS, *dreptele* $A' A_2$, $B' B_2$, $C' C_2$ *sunt concurente în centrul de greutate* G.

Proprietatea se stabilește considerând triunghiul $AA'S$. Mediana AA_1 e mediană și în $\Delta AA'S$ iar dreapta lui Euler SH e și ea o mediană în acest triunghiu. Deci a treia mediană $A' A_2$ va trece prin punctul de întâlnire a primelor 2, care se știe că e tocmai G. Prin analogie se găsește că si $B' B_2$, $C' C_2$ trec prin G.

c. c. t. d.

3). Δ-*rile* $A'B'C'$ *și* ABC *sunt egale și invers omotetice; centrul de omotetie e în* H.

Proprietatea e aproape intuitivă.

4). *Centrele de omotetie ale triunghiurilor* ABC; $A'B'C'$; $A_1 B_1 C_1$ *luate câte două sunt 3 puncte colineare.*

Această proprietate demonstrează o proprietate bine cunoscută, anume: $H_1 G_1 S$ sunt colineare, formând dreapta lui Euler. Ea poate constitui o nouă demonstrație a proprietății (1).

5). *Patrulaterele* $H_b H_c C' B'$; $H_a H_c A' C'$; $H_a H_b A' B'$ *sunt inscriptibile.*

Se cunosc relațiile:

$$AH \cdot HH_a = BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c$$

dar: $AH = A'H$; $BH = B'H$; $CH = C'H$

înlocuind căpătăm:

$$A'H \cdot HH_a = B'H \cdot HH_b = C'H \cdot HH_c$$

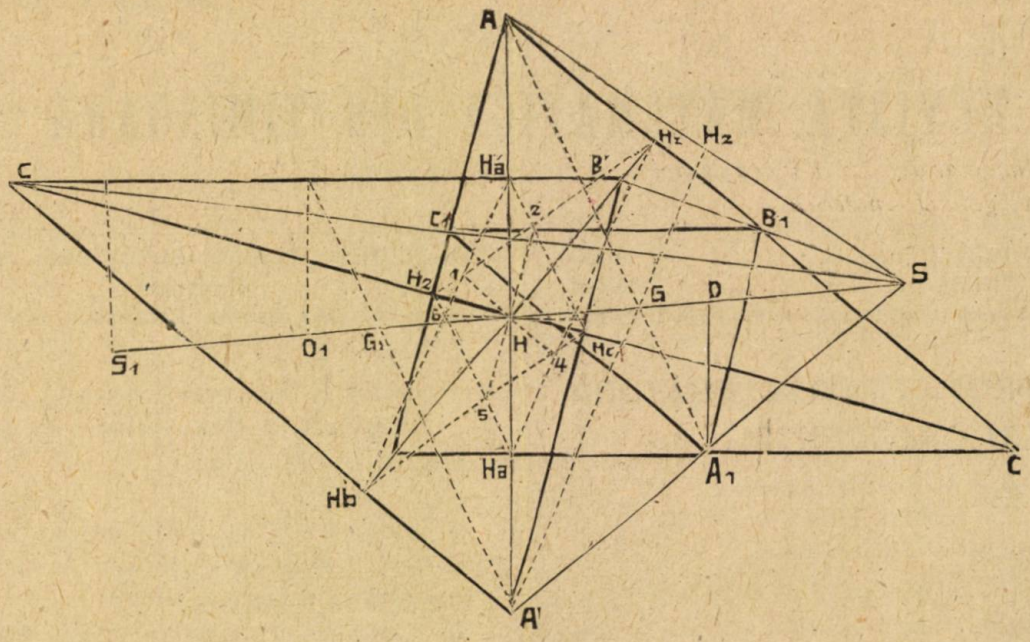
relație ce demonstrează proprietatea (5).

6). *Cercul circumscris* Δ-*ului* $A'B'C'$ *și cercul circumscris* Δ-*ului* $H_a H_b H_c$ *(cercul lui Euler) sunt inverse unul altuia.*

Aceasta rezultă din (5): Centrul de inversiune e H iar puterea este:

$$AH \cdot HA_a = 2R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

7). *Triunghiurile* ABC *și* $A'B'C'$, *au aceiași dreaptă a lui Euler.* H, ortocentrul triunghiului ABC e în același timp ortocentrul Δ-ului $A'B'C'$. Pe dealtă parte $A'_1 B'_1 C'_1$ (A complimentar Δ-ului $A'B'C'$) și ABC au ca centru de omotetie un punct S_1, simetricul lui H față de O_1 [centrul cer-



culuí (A'C' B')]. Aceasta se observă ținând seamă de (4) aplicată lui A'B'C'. Considerând acum triunghiurile: A B C, $A'_1 B'_1 C'_1$ și $A_1 B_1 C_1$, omotetice, centrele lor de omotetie S_1, H, G sunt în linie dreaptă și prin urmare proprietatea e adevărată.

8). Considerăm cercurile

$$(A B H_a H_b),\ (H_a H_b H C),\ (H_a H_b A' B')$$

care au o coardă comnuă pe $H_a H_b$. Linia centrelor $C_1 E_c P$ va fi perpendiculară pe mijlocul lui $H_a H_b$ (E_c punctul eulerian al înălțimei $C H_c$; P, centrul cercului $A_a H_b A' B'$). Analog vom avea dreptele $B_1 E_b N$ și $A_1 E_a M$ ce conțin centrele celorlalte două sisteme de cercuri analoage. Dar aceste 3 drepte fiind mediatricele triunghiului $H_a H_b H_c$ sunt concurente iar punctul lor de concurență e O_9 centrul cercului lui Euler.

9). *Axul ortic al triunghiului* A'B'C' (*axul radical al cercurilor* O'_9 *și* O_1) *este simetricul față cu* H *al axului ortic al* Δ*-ului* A B C. Proprietatea este o consecință a rotații de 180° dată Δ-ului A B C în jurul lui H până ia poziția A'B'C'.

10) *Axele radicale ale perechilor de cercuri* (O_9, O'_9); (O, O_1) *se confundă*. In adevăr, fiindcă cercurile O, O_1 sunt egale și O_9, O'_9 de asemenea, axul radical se găsește perpendicular pe mijlocul distanței centrelor. Acest mijloc este tocmai ortocentrul.

11). *Dacă* $H'_a H'_b H'_c$ *este triunghiul ortic al* Δ*-ului* A'B'C' *atunci triunghiurile* $H'_a H'_b H'_c$; $H_a H_b H_c$ *sunt circumscrise unui acelaș cerc.*

Ținând seamă că triunghiurile sunt egale, iar H e un punct comun și în acelaș timp centrul cercului înscris în cele 2 triunghiuri ortice, acest cerc va fi tangent laturilor celor 2 triunghiuri. Această proprietate se putea stabili considerând în cazul general al exagonului lui Brianchon, care pentru cazul particular, când triunghiurile sunt egale și invers omotetice — cazul de față — centrul de omotetie H e centrul conicei înscrise. Ca consecință, dreptele ce unesc intersecțiile acestor triunghiuri (1, 4); (2, 5); (3, 6) sunt concurente în H.

Acestea sunt proprietățile ce voiam să le expun. Să se observe că legătura aceasta biunivocă între cele 2 triunghiuri A B C și A'B'C', ne dă posibilitatea să întrezărim și alte proprietăți. Ele provin din faptul că triunghiul A'B'C' se obține prin rotirea de 180° a triunghiului A B C în jurul lui H. In acest caz H e un centru de simetrie, iar dreapta lui Euler, o axă de simetrie a celor două triunghiuri. Dacă am căuta să generalizăm pentru cazul când H e un punct de întâlnire a trei ceviene oarecare, chestiunea nu mai prezintă un interes deosebit, singurul fapt mai important,— cel putem menționa — e proprietatea:

12). *Dacă* M *e un punct oarecare iar* A'B'C' *vârfurile unui triunghiu simetric vârfurilor* ABC *în raport cu* M, *când* M *descrie o curbă oarecare, centrul de omotetie al triunghiurilor* A'B'C' *şi al complimentarului lui* ABC *(şi invers) descrie o curbă egală şi omotetică.*

NOTE MATEMATICE

Asupra unei note din G. M. D-l Mihăilescu S. Ştefan, într'o notă din *„Gazeta Matematică"*, anul XXVII, No. 10, din Iunie 1922) soluţionează următoarea problemă:

„Între rădăcinele x_1, x_2, x_3 *ale ecuaţiei* $x^3+px+q=0$ *se dă relaţia* $ax_1+bx_2+cx_3=0$ (a, b, c *fiind numere date*) *şi se cer rădăcinele şi relaţia dintre coeficienţi".*

Voi da o soluţie mai simplă ca cea dată în „G M". Pentru aceasta alăturând relaţiei date, relaţiile între coeficienţi, avem:

$$(1)\quad \begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p \\ x_1x_2x_3=-q \end{cases}$$

Privim aceste relaţii ca un sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute x_1, x_2, x_3. Primele două relaţii formează un sistem omogen, deci obţinem pentru x_1, x_2, x_3 valori proporţionale cu determinanţii;

$$\begin{vmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

şi ţinând seama şi de ultima relaţie din (1), putem scrie:

$$(2)\quad \frac{x_1}{b-c}=\frac{x_2}{c-a}=\frac{x_3}{a-b}=\sqrt[3]{\frac{-q}{(a-b)(c-a)(b-c)}}$$

de unde deducem:

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{q(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}},\quad x_2=\sqrt[3]{\frac{-q(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}},$$

$$x_3=\sqrt[3]{\frac{q(a-b)^2}{(a-c)(b-c)}},$$

care sunt rădăcinele ecuaţiei date.

Inlocuind aceste rădăcini în a treia relaţie din (1) găsim:

$$\sqrt[3]{\frac{-q^2(a-c)(b-c)}{(a-b)^2}}+\sqrt[3]{\frac{q^2(b-c)(a-b)}{(a-c)^2}}+\sqrt[3]{\frac{-q^2(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}}=p$$

$$**\quad \sqrt[3]{q^2(a-b)(a-c)(b-c)}\times\left(-\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}\right)=p$$

$$***\quad p^3(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2+q^2(a+b+c-ab-ac-bc)^3=0,$$

şi aceasta este relaţia de condiţie dintre coeficienţi.

Observare. Relaţiile (2) se puteau obţine fără cunoaşterea teoriei determinanţilor, multiplicând numai relaţia a doua din (1) pe rând cu b şi c şi scăzând din prima.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate. anul II, No. 7. Martie 1923. Les séries trigonométriques de *Tr. Lalescu.* Despre Cuaternioni de *E. Abasohn.* Isomorfismul grupului transformărilor omografice cu grupul cuaternionilor de *D. Barbelian.*

Gazeta Matematică, Anul XXVIII, No. 7, Martie 1923. Asupra triunghiului automedian de *V. Cristescu,* Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare pe intervalul 1 Septembrie 1921 — 1 Septembrie 1922.

Note matematice şi ştiinţifice, seria I, N-rile 7 — 10, Martie 1923. Cuvântul nostru. Teoria relativităţei de *St Georgescu-Gorjan.* Curenţi alternativi de *T. S. Ivanovici.* Lămpi cu vapori de mercur de *T. S. Ivanovici.* Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei $px^2+qy^2=(p+q)z^2$ de *Ioan B. Florescu.*

Table de Logaritmi de Dimitrie Vasilovici, profesor la Şcoala reală superioară ortodoxă în Cernăuţi, din 1923; preţul 28 lei. Cuprinde: 1) Tablele de logaritmi ale numerilor dela 1 la 10000. 2) Tabla logaritmilor naturali. 3) Tablele logaritmilor funcţiunilor goniometrice: sin, cos, tang şi cotg din minut în minut. 4) Logaritmii linii-

lor trigonometrice pentru primele cinci minute din secundă în secundă. 5) Liniile trigonometrice naturale, 6) Tabela mortalității. 7) Tabela valorilor expresiei:

$$q^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Explicări pentru întrebuințarea logaritmilor. Logaritmii sunt calculați cu cinci-zecimale.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examen partial de geometrie analitica

(lucrare scrisă)

(10 Februarie 1923)

SERIA I

1. Prin un punct dat să se ducă o perpendiculară pe o dreaptă dată.

Să se găsească distanța dela punctul (0, 1, 2) la dreapta

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{7}$$

3. Fie A și B proecțiile unui punct C pe 2 axe dreptunghiulare O_x și O_y. Să se demonstreze că dacă perimetrul dreptunghiului O A C B este constant atunci perpendiculara din C pe A B trece printr'un punct fix.

4) Se dă o dreaptă Δ și un punct fix F. Se cere locul geometric al punctelor M știind că raportul dintre M F și depărtarea lui M la Δ este constant și egal cu K. Să se discute natura locului.

SERIA II

1. Cunoscând coordonatele a 2 puncte M_1, M_2 se cere să se găsească coordonatele unui punct P de pe $M_1 M_2$.

2. Să se găsească distanța dela punctul (0, 1, 2) la dreapta

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$$

3. Pe prelungirile O A și O B ale laturilor unui triunghiu O A B se iau 2 lungimi egale între ele, A C și B D. Să se arate că perpendiculara pe mijlocul lui C D trece printr'un punct fix.

4. Fie O_x, O_y un sistem de axe dreptunghiulare, A (2, 3) și B (3, 4) două puncte date. O dreaptă de direcție dată taie pe O_x în D și pe O_y în E. Se cere locul geometric al punctului de întâlnire al dreptelor A E și B D. Să se discute natura locului.

SERIA III

1) Să se găsească condiția de perpendicularitate între 2 drepte date.

2. Să se găsească distanța dela punctul (0, 1, 2) la dreapta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{7}.$$

3. Fie D și E punctele unde laturile C A și C B ale unui triunghiu A B C sunt tăiate de paralela D E la A B. Se cere locul geometric al întâlnirei perpendicularelor în D și E pe C A și C B.

4. Fie O_x, O_y două axe dreptunghiulare. Se dă o dreaptă Δ paralelă cu O_y și fie M un punct variabil pe cercul cu centrul în O' (a, 0) și de rază R. Paralela din M la O_x taie pe Δ în D iar O M întâlnește pe Δ în B. Se cere locul geometric al punctului M' în care O D este întâlnită de paralela dusă din B la O_x. Să se discute natura locului.

SERIA IV

1. Să se găsească ecuațiile bisectoarelor a 2 drepte date prin ecuațiile lor.

2. Să se găsească distanța dela punctul (2, 0, 1) la dreapta

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$$

3. Pe laturile O A și O B ale unui triunghiu dreptunghic în O se construiesc patratele O A C D și O B E F, în afară. Fie H intersecția dreptelor A E, B C și I intersecția dreptelor C D, E F. Să se demonstreze că dreapta I H trece printr'un punct fix atunci când punctele A și B se mișcă ori cum pe O A și O B.

4. Pe axa O_x se dă punctul fix F (2, 0) și fie C un punct variabil pe O_y. Pe paralela dusă prin C la O_x se ia un punct B așa ca B C să fie egal cu jumătate din B F. Se mai dă un punct A (0, λ). Se cere locul geometric al intersecției lui O B cu A C. Să se discute natura locului.

SERIA V

1. Să se găsească unghiul a 2 drepte în plan,

2. Să se găsească distanța dela punctul (0, 1, 2) la dreapta

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{7}$$

3. Se dau 3 drepte paralele A B, A' B', A'' B''. Să se demonstreze că perechile de drepte (A A', B B'). (A A'', B B''), (A' A'', B' B'') se întâlnesc în 3 puncte colineare.

4. Fie D (λ, 4) și C (2, λ) două puncte fixe. Se ia pe O_x punctul A și pe O_y punctul B așa ca triunghiul dreptunghic A O B să fie isoscel. Se cere locul geometric al punctului de întâlnire al dreptelor A C și B D. Să se discute natura locului.

SERIA VI

1. Să se găsească valoarea distanței dela un punct la o dreaptă în plan.

2. Să se găsească distanța dela punctul (1, 2, 0) la dreapta

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-3}{7}=\frac{z-3}{3}$$

3. Paralele duse printr'un punct fix P la laturile O_x și O_y ale unui unghiu $x\,O\,y$ taie pe O_y în D și pe O_x în C. O secantă variabilă trecând prin P taie pe O_x în A și O_y în B. Să se demonstreze că produsul $C\,A \times D\,B$ este constant.

4. Fie P un punct mobil pe o dreaptă fixă Δ și O un punct fix. Pe perpendiculara în P pe Δ se ia un punct A așa că

$$P\,A = K\,.\,O\,P.$$

Se cere locul geometric a lui A. Să se discute natura locului.

Timpul acordat 4 ore.

ȘCOALA MILITARA DE ARTILERIE

examen scris la analitica

28 Martie 1923

Să se reducă următoarele ecuații și să se determine natura suprafețelor pe care le reprezintă:

$$x^2+y^2+z^2-2xy-6yz-2zx-6x-2y-2z+2=0$$

$$y^2-z^2+2myz+mx^2-1=0$$

$$5x^2+5y^2+2z^2+8xy-2xz+2yz+x+y=0$$

$$x^2+y^2+2mxz+2myz-2x+1=0$$

$$x^2+6y^2-z^2+5xy-yz+2x+5y=0$$

$$mx^2-6xy+2xz-2yz+5mz^2+2z+6=0$$

$$4x^2+9y^2+36z^2+12xy-36yz-24zx-4x-6y+12z+1=0$$

$$6xy+my^2+2xz-2zy+5mz^2-2z-6=0$$

$$x^2+6y^2-z^2+5xy-yz+2x+5y=0$$

$$y^2+z^2-x^2+2mxz+2myx-2z-2y+2x+1=0$$

$$3(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx)-1=0$$

$$x^2+4xy+2xz+6myz+z^2+2x+4y+1=0$$

$$x^2+y^2-z^2-2xy-2xz-6yz-6x-2y-2z+2=0$$

$$3mx^2+4yx+2xz+4yz+mz^2+2y+2z+2=0$$

$$2x^2+2y^2+z^2+2yz-zx-4xy+y+x-\frac{1}{8}=0$$

$$2x^2-2xy+my^2-4xz+4mzy+z^2+2y+2=0$$

$$2x^2-2y^2-z^2+3xy-xz+3yz+x-y=0$$

$$2x^2-2mxy+y^2+10yz-6z^2+4x+2y-3=0$$

PROBLEME REZOLVATE

135. — *Să se rezolve ecuațiunea:*

$$2\sin^4 x-\sin^2 x(4\cos x-3)=5\cos x+1.$$

G. BRATU

Soluțiune dată de d-nii *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de artilerie Timișoara) și *Popovici Tiberiu* (Arad).

Inlocuind $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, ecuațiunea dată devine:

$$2(1-\cos^2 x)^2-(1-\cos^2 x)(4\cos x-3)=5\cos x+1$$

$$2\cos^4 x+4\cos^3 x-7\cos^2 x-9\cos x+4=0$$

$$2\cos^2 x(\cos x+1)^2-9\cos x(\cos x+1)+4=0$$

Rezolvând în raport cu $\cos x(\cos x+1)$, avem:

$$\cos^2 x+\cos x=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm 7}{4}$$

(1) $\cos^2 x+\cos x-4=0$,

(2) $2\cos^2 x+2\cos x-1=0$.

Din ecuația (1) deducem

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

dar nici una din aceste rădăcinl nu îndeplinește condiția

$$-1<\cos x<1$$

deci nu le putem utiliza.

Din ecuația (2) deducem:

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

și singura rădăcină bună este:

$$\cos x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Cum,

$$\sqrt{3}=1{,}7320$$

deducem

$$\cos x=0.366$$

cu aproximație de 0.001.

Aplicând logaritmii găsim:

$$\log \cos x = \bar{1},56348.$$

Trecând la arce găsim:

Pentru $\bar{1},56375 \ldots . 68^{0}, 31'$

$\bar{1},56343 \ldots . 68^{0}, 32'$

Pentru $32 \ldots\ldots\ldots\ldots 60''$

$27 \qquad\qquad y,$

deci $y = 51''$.

Atunci

$$x = 68^{0}, 31', 51''$$

și mai general

$$x = 2k\pi \pm 68^{0}, 31' 51''.$$

D-nii *Beldie D.* (R.-Sărat), *Dobrescu-Băbici* (Caracal), *Katz Pincu* (Galați) și *Negretzu Florea* (Pitești), au reușit să descompună ecuația dată în,

$$(\cos^2 x + \cos x - 4)(2\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$$

dar nu au găsit valorile arcului care o satisfac.

Soluție dată de d-nii: *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Asnaș I. Solomon*, (Călărași), *Cocorandu M.*, (Brașov), *Flickstein I.*, (Cernăuți), *Ionescu I. Ilie* (Caracal), *Silion Gh. Ion* (Câmpina), *Stănciulescu A. Gh*, (Pitești), *Ștefănescu Emil* (București), *Stoenescu I.* (București).

Inlocuim $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ și obținem:

$$2\cos^4 x + 4\cos^3 x - 7\cos^2 x - 9\cos x + 4 = 0.$$

Punând $\cos x = y$, avem ecuația:

$$2y^4 + 4y^3 - 7y^2 - 9y + 4 = 0.$$

Dacă facem,

$$(1) \qquad y = z + h$$

și ordonăm, avem:

$$(2)\quad 2z^4 + (8h+4)z^3 + (12h^2 + 12h - 7)z^2 + (8h^3 + 12h^2 - 14h - 9)z + 2h^4 + 4h^3 - 7h^2 - 9h + 4 = 0$$

Anulând coeficientul lui z^3, adică luând $h = -\frac{1}{2}$ ecuația (2) devine:

$$2z^4 - 10z^2 + \frac{51}{8} = 0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad 16z^4 - 80z^2 + 51 = 0.$$

De unde,

$$z = \pm\sqrt{\frac{40 \pm \sqrt{1600 - 816}}{16}} = \pm\sqrt{\frac{40 \pm 28}{16}}$$

Inlocuind în (1) valorile lui z și h, găsite avem:

$$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{10 \pm 7}}{2} = \cos x$$

Singura valoare posibilă pentru $\cos x$, este

$$\cos x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

și găsim ca mai sus,

$$x = 2k\pi \pm 68^{0}, 31' 51''$$

V. A.

144, — *Să se rezolve ecuația:*

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)$$

CAROL MORWAY

Prima soluție. Ridicând la patrat ambii membri ai ecuației date, avem:

$$x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x^2 - x} = 6 + 4\sqrt{3} + 2$$

Simplificând putem scrie:

$$\sqrt{x^2 - x} = 4 + 2\sqrt{3} - x$$

Ridicând din nou la patrat obținem:

$$x^2 - x = 16 + 12 + x^2 + 16\sqrt{3} - 8x - 4x\sqrt{3}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad (7 + 4\sqrt{3})x = 4(7 + 4\sqrt{3})$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad x = 4.$$

Au dat soluțiuni analoage d-nii: *Alexandrescu Mihai* (Constanța), *Antoniu S. Ion* (M-rea Dealu), *Arcadian G. Nicu* (Caracal), *Atanasiu D-tru* (M-rea Dealu), *Bobârnac Mircea. Bolgiu B.* (București), *Brăileanu Al.* (Constanța), *Brătescu-Vâlcea, Cocorandu M.* (Brașov), *Cohen Magdalena, Cotaru Plutach* (student drept), *Crăinicescu Eugen* (Timișoara), *Cristescu Virgil* (Pitești), *Dan V.* (Galați), *Dobrescu-Băbici, Dordea A. Traian, Dragomir N. Ioan*

(Bucureşti), *Dumitrescu S. Pavel* (Piteşti). *Flickstein I.* (Cernăuţi), *Gabrielescu C. Vasile* (Brăila), *Georgescu C-tin* (Bucureşti), *Georgescu Florian* (Bucureşti), *Gogălniceanu M. Mihai* (Brăila), *Goilav Cristea* (Tecuci), *Grünfeld B. Maximilian* (Brăila) *Harth Ernest* (Câmpulung, Bucovina), *Iliescu E.* (M-rea Dealu), *Ionescu Carol* (Bucureşti), *Ionescu C-tin* (Bucureşti), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Iordache N. Ion* (Curtea-de-Argeş), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein I.* (Galaţi), *Lăzărescu Th. Jean* (Piteşti), *Macri Socrate* (Botoşani), *Măru D-tru* (Galaţi), *Miclescu Andrei* (Timişoara), *Mehlmann Th.* (Câmpulung, Bucovina), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Murariu Petru* (Lugoj), *Negretzu Florea* (Piteşti), *Neştianu Gh. Gheorghe* (M-rea Dealu), *Nicolau Gh. Al.* (Bucureşti), *Nicolau M. Iulian*, *Oprişeanu Gh. Ernest* (Bârlad), *Păstroianu Mihai* (M-rea Dealu). *Pârâianu N.* (Constanţa), *Petrescu Cernea, Pârvulescu Titus* (M-rea Dealu) *Păslea Viorică* (Câmpulung, Bucovina), *Popea Ovidiu* (Kişinău), *Popovici Tiberiu* (Arad), *Propst A. Jean* (T.-Severin), *Rigani Cr.*, *Samoilă D-tru* (Câmpina), *Stănescu A. D-tru.* (Galaţi), *Ştefănescu Emil* (Bucureşti), *Stoenescu Al. Ion* (Bucureşti), *Taubner Al.* (Botoşani), *Terescenco N.* (Kişinău), *Theodorescu St. I.* (Ploeşti), *Theodoru Nicuţă* (Huşi), *Timotin D-tru* (Oradea-Mare), *Tuducescu A. N.*, *Vasilescu Virgil*, *Wetter Anna* (Câmpulung, Bucovina) *Botea Gh. Nicolae* (Bucureşti), *Dimitriu Adrian* (M-rea Dealul), *Dumitrescu C. Nicolae* (Piteşti), *Haimovici Salo, Mateescu Gh.* (Galaţi), *Pinchis M.* (Galaţi), *Popovici Chr. Ion* (Galaţi), *Ristea Marin* (Caracal), *Runcan Veniamin* (M-rea Dealu), *Silion Gh. Ion* (Câmpina), *Ţânţăreanu Aurel* (M-rea Dealu), şi *Witzmann H. Marcu* (Galaţi).

Soluţia a doua. O primă ridicare la patrat ne dă după oarecare simplificări:

$$x + \sqrt{x^2 - x} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$(x-4)^2 = \left(2\sqrt{3} - \sqrt{x^2 - x}\right)^2$$

Desvoltând calculele şi simplificând, avem:

$$7x - 4 = 4\sqrt{3(x^2 - x)}$$

Ridicând din nou la patrat avem după oarecare simplificări

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

$$x = 4,$$

care verifică ecuaţia dată.

Soluţii analoage date de d-nii: *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Asnaş I. Solomon* (Călăraşi), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Bercovici Emil*, *Berdan C.* (Bârlad), *Beşliu C.* (Timişoara), *Branover* (Timişoara), *Bogdan M.* (Caracal), *Buşilă A. Adrian* (Bucureşti), *Călin I. Aureliu* (Bucureşti). *Ciolacu St. Miron* (Caracal), *Constantinescu A. Mihail* (Bucureşti), *Dragomirescu-Buzne E.* (Timişoara), *Dumitrescu Gh. Marin* (Craiova), *Gaef George* (Silistra), *Georgescu C. Ioan, Georgescu T.* (Ploeşti), *I. N. Georgescu-Val* (Timişoara), *Ghiţescu Virgil* (Bucureşti), *Grofşorean I. G.* (Arad). *Ionescu I. Ilie* (Caracal), *Ionescu I. Nicolae* (Piteşti), *Ioniţă M. Ion* (Timişoara), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (Giurgiu), *Marin D Trincă* (Caracal), *Popovici P. Dan* (M-rea Dealu), *Răuţ C-tin* (M-rea Dealu), *Rosetel Boju* (Silistra), *Scodreanu Al.* (Silistra), *Stamatiu Mih.*, *Stănciulescu A. Gh.* (Piteşti), *Theodoridis Th.* (Silistra), *Ulman Octav* (Timişoara), *Weiss L.* (Galaţi), *Vulpe Tiberiu* (Timişoara), *Kassargian A.* (Bucureşti), *Mitran St. Grigore* (Craiova), *Musta Ştefan* (Timişoara), *Nicolau Gh. C-tin* (R.-Sărat), *Popescu N. N.* (Câmpina), *Rădulescu P. Stelian* (Giurgiu), *Solomon N.* (Timişoara) şi *Tunaru R, Traian* (Craiova).

Notă. 1) D-nii *Bogdan M.*, *Coşereanu I.*, *Dumitrescu G. Marin*, *Iliescu E.*, *Oprişan G. Ernest* au observat că o ecuaţie analoagă anume:

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

a propus d-l *B. M. Barbălat* în „G. M." vol. XXVI, exerciţiul No. 38.

2) D-l *Dordea A. Traian* rezolvă ecuaţia mai generală,

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}\right)$$

şi găseşte $x = a^2$.

3) D-l *Antoniu S. Ion* observă că dacă în ecuaţia dată se înlocueşte x cu x'' se ajunge procedând ca mai sus la ecuaţia binoamă

$$x'' = 4.$$

Dacă înlocueşte x prin $f(x)$ însă se ajunge la ecuaţia:

$$f(x) = 4.$$

4) D-l *Georgescu Florian* arată că ecuaţia

$$\sqrt[m]{x + \sqrt[m]{x}} + \sqrt[m]{x - \sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{q}\left(\sqrt[m]{q+1} - \sqrt[m]{q-1}\right)$$

e satisfăcută de $x = q^2$ şi că ecuaţia,

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{x^2 - \sqrt[3]{x^2}} = 3\left(\sqrt{82} + \sqrt{80}\right)$$

are soluţia $x = 27$.

Studiază şi alte ecuaţii analoage.

5) D-l *Popovici Tiberiu* indică şi alte ecuaţii analoage printre care relevăm următoarele:

$$\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt{3}\right)$$

cu soluţia $x = 8$.

$$\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}} + \sqrt[n]{x - \sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{p}\left(\sqrt[n]{p^{n-2} + 1} + \sqrt[n]{p^{n-2} - 1}\right)$$

cu soluţia $x = p^n$.

6) D-l *Stoenescu* indică ecuațiunea,

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3}+1)$$

cu soluția $x=4$.

S'au mai primit soluțiuni bune dela d-nii: *Atanasiadi Alex.* (Timisoara), *Cazacu V.* (Iași), *Cândea Ioan* (Sibiu), *Ciută Gavril* (Timișoara), *Dospinoiu N.* (conductor de lucrări publice),, *Dvorin L.*, *Gheorghiu Gh. Lucian*, *Grünberg S. Herman* (lic. Galați) *Herscovici Em.* (Galați), *Lichtemberg W. D.* (lic. Galați), *Mircea Adam*, *Moroianu At.* (Constanța), *Popovici Gh. A.* (lic, Internat Iași), *Scripcă Laur* (lic. Internat Iași) *Stoeneseu C. Ioan* (lic. Galați) și *Weissler D.* (Câmpina),

Observare. Pe lângă soluțiile menționate sau primit încă vreo zece soluțiuni eronate a căror autori evident nu interezează.

Vom releva însă unele din greșelile comise, care evident constituesc o ocară.

1) Unul dintre corespondenți deduce din ecuația dată,

$$\sqrt{x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}=\sqrt{6}+\sqrt{1}\ !$$

2) Un alt corespondent după ce scrie ecuația dată astfel,

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

spune: „Dăm $\sqrt{\ }^{-ul}$ ca factor comun, avem:

$$x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}=6+2\text{“}\ !$$

3) Alt corespondent pune ecuația dată sub forma:

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\ !$$

4) Alt corespondent spune:

„Să ridicăm ecuația la patrat,

$$x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}=8\text{“}\ !$$

5) Un întreg cerc de „Străduințe“ elevi de cl. V, afirmă:

„Vedem că $\sqrt{+\sqrt{x}}$ și cu $\sqrt{-\sqrt{x}}$ se reduce și ne rămâne:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x}=\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)\ !$$

Credem că ajunge — și dacă ar sta în puterea noastră am cere expulzarea autorilor din frumosul Regat al Matematicilor, ca unii ce au comis atentate contra adevărurilor elementare și au căutat să dărâme falnica clădire a radicalilor.

V. A.

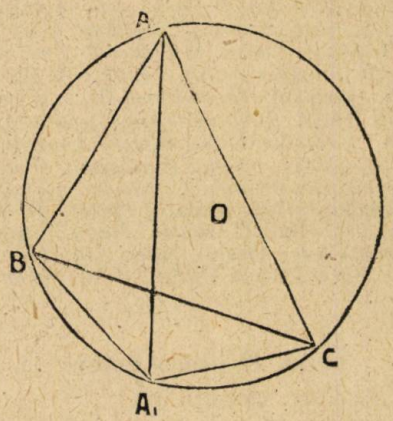
158. — *Intr'un cerc de rază* R *se înscrie un triunghiu* ABC. *Dacă* l *este lungimea bisectoarei unghiului* A, *limitată la cerc, să se calculeze laturile triunghiului* ABC, *în funcție de* $\hat{A}$, R, l

MIRON NICULESCU

Soluție dată de d-l *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București).

Se cunosc formulele:

(1) $a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$



Privind figura avem:

$$l=2R\sin AB A_1$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \widehat{AB A_1}=\text{arc sin}\frac{l}{2R}$$

Insă:

$$\hat{B}=\widehat{ABA_1}-\frac{\hat{A}}{2}=\text{arc sin}\frac{l}{2R}-\frac{\hat{A}}{2}$$

De asemenea:

$$\hat{C}=\widehat{AA_1B}=180^0-\left(\frac{\hat{A}}{2}+\widehat{ABA_1}\right)=$$

$$180^0-\left(\frac{\hat{A}}{2}+\text{arc sin}\frac{l}{2R}\right)$$

Prin urmare formulele (1) ne dau:

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin\left(\text{arc sin}\frac{l}{2R}-\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

$$c=2R\sin\left(\text{arc sin}\frac{l}{2R}+\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

Soluții aproape analoage date de d-nii : *I. N. Georgescu-Val*, (Șc. de artilerie), *Lăzărescu St.* (lic. Giurgiu), *Pollak Al.* (Timișoara), *Scodreanu Al.* (Silistra). *Stoenescu I. Al.* și *Vasilescu C. Virgil.*

Altă soluție dată de d-nii : *Dobrescu Băbici* (lic. Caracal), *Brăescu G., Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Mehlman Th.* (Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Negretzu Fl.* (Pitești), *Pârâianu N.* (Șc. Navală), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Silion Gh. I.* (lic. Câmpina) *Solacolu St.*, *Stănculescu A. Gh.* (lic. Pitești).

In triunghiul A B C, înscris în cercul O de rază R, avem :

$$a = 2\,R \sin A$$

și latura a este astfel calculată. Pentru a calcula laturile b și c, considerăm patrulaterul A B A_1 C și teorema lui Ptolomeu ne permite a scrie.

$$b \cdot \overline{B\,A_1} + c \cdot \overline{A_1\,C} = a \cdot l = 2\,R \cdot l \sin A$$

Cum,

$$B\,A_1 = A_1\,C, \qquad \text{avem:}$$

$$(1) \qquad B \cdot A_1\,(b + c) = 2\,R\,l \sin A$$

Dar,

$$B\,A_1 = 2\,R \sin \frac{A}{2}$$

așa că din (1) deducem :

$$(2) \qquad b + c = 2\,l \cos \frac{A}{2}$$

De altă parte în triunghiul A B C, putem scrie :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$

$$(3) \qquad (b + c)^2 - 2\,b\,c\,(1 + \cos A) = a^2$$

In virtutea relațiunei (2) și a egalității,

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

relațiunea (3) devine :

$$4\,l^2 \cos^2 \frac{A}{2} - 4\,b\,c \cos^2 \frac{A}{2} = a^2$$

$$(4) \qquad b\,c = l^2 - \frac{a}{4 \cos^2 \frac{A}{2}} = l^2 - 4\,R^2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

Privind relațiunile (2) și (4), deducem că b și c sunt rădăcinele ecuației,

$$x^2 - 2\,l \cos \frac{A}{2}\,x + l^2 - 4\,R^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 0,$$

care ne dă :

$$x = l \cos \frac{A}{2} \pm \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{A}{2} - l^2 + 4\,R^2 \sin^2 \frac{A}{2}}$$

Atunci,

$$b = l \cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \sqrt{4\,R^2 - l^2}$$

$$c = l \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \sqrt{4\,R^2 - l^2}$$

Avem astfel calculate și laturile b și c, ale căror valori sunt reale, fiindcă $4\,R^2 > l^2$.

Observări. 1) E ușor de verificat că expresiunile găsite pentru b și c în cele două soluțiuni de mai sus sunt egale, adică :

$$2R \sin\left(\text{arc sin}\,\frac{l}{2R} \mp \frac{\hat{A}}{2}\right) = l \cos \frac{A}{2} \mp \sin \frac{A}{2} \sqrt{4\,R^2 - l^2}$$

In adevăr, desvoltând sinusul din primul membru, avem :

$$2\,R \sin\left(\text{arc sin}\,\frac{l}{2R} \mp \frac{\hat{A}}{2}\right) = 2\,R\,\frac{l}{2R} \mp 2R \sqrt{1 - \frac{l^2}{4R^2}} \sin \frac{A}{2} = l \cos \frac{A}{2} \mp \sin \frac{A}{2} \sqrt{4\,R^2 - l^2}$$

2) D-l *Popovici Tiberiu* a stabilit încă câteva relațiuni importante.

In adevăr din relația (2) se deduce :

$$l = \frac{b + c}{2 \cos \frac{A}{2}}$$

și cum știm că,

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - a)}{b\,c}}$$

avem

$$l = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{\sqrt{p\,(p-a)}}$$

De altă parte dacă l_a este lungimea bisectoarei din A, ştim că

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p\,(p-a)\,bc}$$

Multiplicând ultimele două relaţiuni găsim

$$l \cdot l_a = bc.$$

In mod analog avem

$$l' l_b = ac, \quad l'' l_c = ab$$

l' şi l'' fiind analoagele lui l şi l_b şi l_c a lui l_a. Inmulţind ultimele trei relaţiuni, deducem:

$$abc = \sqrt{l\,l'\,l''\,l_a\,l_b\,l_c}$$

Inversând aceleaşi relaţiuni şi adunând, găsim:

$$2p = \sqrt{l\,l'\,l''\,l_a\,l_b\,l_c}\,(l'\,l''\,l_b\,l_c + l\,l''\,l_a\,l_b + l\,l'\,l_a\,l_b)$$

Alte soluţii date de d-nii: *Flickstein* (Cernăuţi), *Goldemberg I.* (lic. Galaţi), *Ionescu I. Bresuică* (lic. Caracal), *Mateescu G.* lic. Galaţi), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Mihăescu B. C-tin* (Giurgiu), *Niculescu I.* (Ploeşti), *Pamula Alex., Plutarc Cotaru* (student drept), *Răuţ C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Rusescu C.* şi *Tuducescu O. N.*

177. — *Dacă avem în numere întregi, relaţia*

$$\alpha^{2m} + \beta^{2n} = \gamma^{2p}$$

atunci expresiunea:

$$E = 2\,(\gamma^p - \alpha^m)\,(\gamma^p - \beta^n)$$

este un patrat perfect.

A. Th. Nicolau

Expresiunea E — desfăcând parantezele se poate scrie:

$$E = 2\gamma^{2p} - 2\alpha^m\gamma^p - 2\beta^n\gamma^p + 2\alpha^m\beta^n$$
$$= \gamma^{2p} + \gamma^{2p} - 2\alpha^m\gamma^p - 2\beta^n\gamma^p + 2\alpha^m\beta^n$$

Inlocuind un γ^{2p} prin valoarea sa din relaţia dată, avem,

$$E = \alpha^{2m} + \beta^{2n} + \gamma^{2p} - 2\alpha^m\gamma^p - 2\beta^n\gamma^p + 2\alpha^m\beta^n = (\alpha^m + \beta^n + \gamma^p)^2,$$

care este un patrat perfect.

Soluţiuni analoage date de d-nii: *Amărăscu O. Gavril* (lic, Caracal), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Berdan C-tin* (Tutova) *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Botez St. Mihail, Brătăşanu Al. George* (lic. Caracal), *Căpitan Ath. Corneliu* (lic. Arad) *Cocorandu M.* (Braşov), *Dobrescu-Băbici* (lic. Caracal), *Dordea A. Traian, Georgescu P. C.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Golcea Cornel* (Deva), *Iliescu E.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal), *Iordache N. I.* (Bucureşti), *Iscovici I. J.* (Piteşti), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Lăzărescu Jean* (Piteşti), *Marinescu I. Gheorghe* (Piteşti), *Mateescu Gh.* (lic. Galaţ), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung. Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Musta Ştefan* (lic. Timişoara), *Nicolau Th. Aurel* (Bucureşti), *Niculescu Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Orbonaş Iuliu* (Deva), *Pinchis A. M.* (lic. Galaţi), *Popeanu A.* (lic, Constanţa), *Popovici Puiu, I. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Popovici C. Ion* (lic. Galaţi), *Schileru C. Dili* (Gorj), *Septilici Raul* (Şc. de artilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Smigelschi Octavian* (lic. R.-Sărat), *Solacolu M. Traian* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Stănciulescu A. Gheorghe* (lic. Piteşti), *Stamatiu Mihai* (Piteşti), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tauber Alex.* (lic. Botoşani), *Ulman Octav* (Timişoara), *Urzică A.*, (lic. Deva) şi *Weiss Leon* (lic. Galaţi),

Observări. 1) D-nii *Amărăscu O. Gavril* şi *Bogdan M.* (Caracal), au observat că dacă am fi avut

$$E = (\gamma^p + \alpha^m)\,(\gamma^p + \beta^n),$$

aceleaşi lucrări de mai sus, ne-ar fi condus la patratul perfect:

$$E = (\alpha^m + \beta^n + \gamma^p)^2$$

Tot d-lor au observat că în enunţ, pentru simplicitate puteam lua,

$$\alpha^m = a, \quad \beta^n = b, \quad \gamma^p = c.$$

2) D-l *I. N. Georgescu-Val* (Şc, de artilerie), observă că problema subsistă nu numai în numere întregi şi că prin urmare poate lipsi din enunţ, cuvintele „în numere întregi".

193, — *Se dă un cerc* O *şi o coardă* AD. *Să se ducă prin punctul* D *o coardă* DC, *care să întâlnească diametrul punctului* A *în* B *şi cercul în* C, *astfel ca triunghiul* ABC *să fie isoscel* (AB = AC).

Corneliu Sandulescu

Prima soluţie dată de d-nii: *Bărglăzan A.* (lic. Sibiu), *Berdan C-tin* (Bârlad), *Balint Emil* (Năsăud), *Cocorandu Mircea* (lic. Braşov), *Gheorghiu Gh. Lucian, Golstein I., Grigore Virgiliu, Hîlmu V. Victor* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Măcri-*

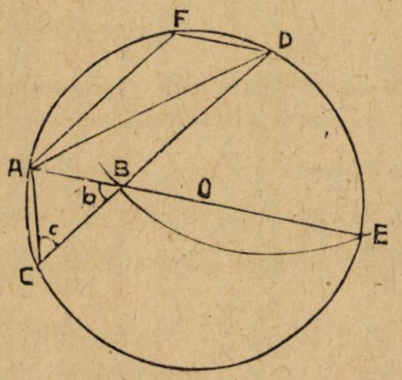
neanu Sterian (Galați), *Iliescu E.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu B. Ioan* (lic. Pitești), *Iordache N. Ion*, *Katz Pincu* (Galați), *Măru D-tru* (lic. Galați), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Negretzu I. Florea* (lic. Pitesti), *Niculescu Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Pinchis M.* (lic. Galați), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Röder O. C.*, *Schileru C. Dili* (Gorj), *și Zuchermann B. M.*

Presupunem problema rezolvată, atunci triunghiul A B C fiind isoscel (A B = A C), urmează

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{DBE}$$

Cum,

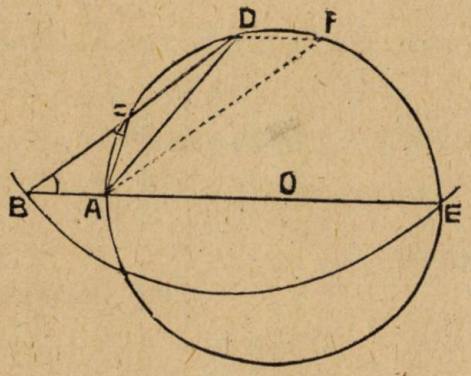
$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{AED}$$



având aceiași măsură, urmează

$$\overset{\frown}{DBE} = \overset{\frown}{DEB}$$

și deci triunghiul E D B este și el isoscel.



Rezultă de aci următoarea construcție:

Din D cu D E ca rază descriem un cerc, care taie diametrul A E în B. Unind D cu B, D B prelungită taie cercul în C și C D este astfel coarda cerută.

Observare. Avem trei cazuri, când $AD < l_4$, $AD > l_4$ și $AD = l_4$, l_4 fiind latura patratului înscris în cerc. In primul caz, punctul B vine între A și E, în al doilea caz B cade pe prelungirea lui E A, și al treilea caz punctul B și C se cufundă cu A și triunghiul A B C se reduce la un punct.

A doua soluție dată de d-nii: *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bercovici David* (lic. Botoșani), *Constantinescu Emil* (lic. M-rea Dealu), *Corșoreanu Gheorghe* (lic. Târgu-Jiu), *Coșereanu Ion* (Piatre-Neamț), *Crăiceanu Gh.* (Cluj), *Dimitriu Adrian* (lic. M-rea Dealu), *Dospinoiu N.* (conducător de lucrări publice), *Dumitrescu C. Nicolae* (Pitești), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila). *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Goldemberg I.* (Galați), *Iscovici I. J.* (Pitești), *Klein S.* (Galați), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (Giurgiu), *Mîrcea Adrian* (Constanța), *Neștianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Popea Ovidiu* (lic. Chișinău), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Răuț C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Runcan Veniamin* (lic. M-rea Dealu), *Solomon N.* (Timișoara), *Solomon Weiss* (Galați) și *Stănciulescu Gh.* (Pitești).

Presupunem problema rezolvată, atunci

$$\overset{\frown}{ACD} = \overset{\frown}{ABC}$$

Ținând seamă de măsurile acestor unghiuri, deducem:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE} \tag{1}$$

Ducând $DF = AE$,

$$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{DE} \tag{2}$$

Scăzând relația (2) din (1), rezultă

$$\overset{\frown}{FD} = \overset{\frown}{AC}$$

de unde deducem că,

$$AF \parallel CD.$$

De aici urmează construcția: Ducem din D o paralelă la diametrul A E, care taie cercul în F, unim A cu F și ducem D C ∥ A F, avem astfel coarda cerută.

Observare. Aceiași ca la prima soluție.

Alte soluții date de d-nii: *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab, București), *Cranover L.* (Timișoara), *Cristescu Virgil* (Pitești), *Damșescu Aurel* (Cluj), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Grofșorean I. G.* (lic. Arad), *Nicolescu Isaïa* (Ploești), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Pantazi G. D-trn* (lic. Brăila), *Pitea T. D-tru* (Timișoara), *Popovici Gh. Ion* (lic. Galați), *Popovici Puiu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Taubner Alexandru* (lic. Botoșani), *Scodrano Alex.* (lic. Durostor), *Vătășan Ovid* (lic. Brașov), *Weiss Leon* (lic. Galați).

Observări. 1) E ușor de văzut că A E poate fi o coardă oarecare nu numai de cât un diametru.

2) D-l *Negretzu I. Florea* studiază problema mai generală, când triunghiul A B C este isoscel, însă fără restricțiunea A B = A C. Cercetează deci cazurile când triunghiul isoscel A B C, ar avea A B = A C, sau A B = C B, sau A C = C B.

PROBLEME PROPUSE

231. — Se cer patratele perfecte de patru cifre astfel ca prima cifră să fie suma ultimilor două; iar diferența numărului format de primele două cifre și a numărului format de ultimele două, să fie egală cu suma primei cifre cu a treia.

RAUT C-TIN

232. — Să se determine valoarea generală a lui k întreg și pozitiv, pentru care expresiunea:

$$E = 9963^{1538} + 1538^{9963} + k$$

este divizibilă cu 19.

VIRGIL GHITESCU

233. — Se dă un triunghiu A B C dreptunghic în A și fie A D și A E înălțimea și simediana corespunzătoare vârfului A. Să se demonstreze relația:

$$\overline{AD}^2 = EB \cdot EC.$$

ION COSEREANU

234. — Intr'un cerc O să se înscrie un triunghiu căruia i se cunoaște o latură și unghiul pe care-l face O I cu una din bisectoare, I fiind centrul cercului înscris triunghiului.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

235. — Se consideră un triunghiu A B C și un punct M mobil pe o paralelă la baza B C Dreptele B M și C M întâlnesc laturile A C și A B respectiv în P și Q. Să se demonstreze că avem

$$\frac{1}{BQ} + \frac{1}{CP} = \text{constant.}$$

SERBAN A. GHEORGHIU

236. — Să se pună sub formă de produs de factori expresiunea:

$$(ab - cd)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - (ac - bd)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$$

I. DIMITRIU-ARAD

237. — Să se calculeze derivatele funcțiunilor $(\sin x)^{\cos x}$ și $(\cos x)^{\sin x}$ în raport cu $\operatorname{tg} x$,

T. POPOVICI.

238. — In cercul O de rază r se duce o coardă $MN = 2l$ pe care se ia începând din mijlocul său A, un segment $AA_1 = \frac{l}{n}$. Se duce perpendiculara A_1M_1 pe OA_1, pe care se ia segmentul $A_1A_2 = \frac{A_1M_1}{n}$; se duce perpendiculara A_2M_2 pe care se ia $A_2A_3 = \frac{A_2M_2}{n}$ și așa mai departe, punctele $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$ fiind pe cerc în ordinea scrisă.

Să se calculeze suma,

$$\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 + \ldots + \overline{OA_n}^2$$

și limita lui OA_n pentru $n = \infty$.

V. ALACI

239. — Fie $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$, rădăcinele ecuației:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Să se calculeze valoarea expresiunei

$$E = 2\cos^2\left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{\pi}{4}\right)$$

în funcție de p, q, r.

EMIL ȘTEFANESCU

Erată. In problema No. 218, membrul al 2-lea trebuie înlocuit cu $\frac{\pi}{2}$ în loc de π

INFORMATIUNI

D-l Traian Lalescu, profesor universitar și deputat, a donat pentru „Revista Matematică din Timișoara", suma de 2000 lei. Avem astfel ocaziunea să-i mulțumim din nou pentru frumoasa atențiune ce ne-a acordat-o și care dovedește dragostea pe care o poartă revistei noastre. In acelaș timp d-l Lalescu răpind din timpul prețios datorit studiilor și celorlalte preocupări ale d-sale, ne-a oferit și concursul trimițând un articol care va apărea în numărul viitor.

Luni, 16 Aprilie, ora 5 p. m., a avut loc adunarea comitetului „Revistei Matematice", pentru examinarea situației.

S'a citit darea de seamă a mersului revistei pe anul trecut și propunerile pentru noul an.

S'a hotărît în legătură cu cererile mai multor membri ca în fiecare număr să se publice câte trei chestiuni mai ușoare pentru clasa V. Aceasta pentruca nivelul revistei să rămâe cât mai elementar, corespunzător primelor începuturi ale matematicelor. In același timp vor putea lucra la aceste chestiuni și elevii din clasa IV, care încep algebra și și-an completat cunoștiințele de geometrie.

In urma turburărilor studențești Școala Politechnică a fost închisă și ea, dela 16 Februarie.

In urma consfătuirii rectorilor tuturor universităților, cursurile se vor redeschide pe ziua de 16 April, și pentru a se recăștiga timpul perdut, cursurile se vor prelungi în luna Iunie. Este speranță că în acest timp se vor putea face cursurile și lucrările practice necesare pentruca să se poată încheia anul. Examenele vor avea loc probabil în toamnă pentru a evita să se prelungească cursurile în luna Iulie.

Am primit la redacție primul număr din o nouă revistă de matematici. *Gazeta Matematicilor elementare financiare și speciale.*

Această gazetă își propune „să desvolte chestiuni mai importante din Aritmetica comercială, Algebra financiară și Cosmografie, cu scopul de a înlesni elevilor studiul acestor cursuri și a economiei timpului, profesorului în sensul de a și-l întrebuința tratând probleme în loc de a face teorie dictată".

Primul număr în 10 pagini cuprinde un articol asupra mișcărei aparente a soarelui, mișcarea ecliptică, problema lui. Kepler; un altul asupra stabilirii prețului de cost și de vânzare ambele de Prof. *N. Zâvoicea.*

Din acest număr aflăm că la liceul Mircea cel Bătrân din Constanța unde apare această revistă se țin concursuri de matematici în fiecare Luni, printre elevii dela liceu, școala comercială, școala navală, se extinde și la școlile din împrejurimi. O inițiativă demnă de laudă.

Comitetul școlar al liceului încurajează mult această activitate și a strâns un fond pentru organizarea acestei inițiative.

Este evident că în modul acesta se va stimula dorința de învățat, și se va putea produce emulație între elevi care singură poate să producă roade, ajutând prin selecționare și munca profesorului.

Gazeta apare la prima a fiecărei luni. Abonamentul pe un trimestru costă 15 lei. Administrația: Profesor C. Cornățeanu, secretarul liceului Mircea cel Bătrân, Constanța.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 MAI 1923 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 5 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TR. LALESCU. SERII CONVERGENTE SI SERII DIVERGENTE
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că dela 1 Aprilie, fac parte din comitetul de redacție al Revistei și d-nii:

Adamescu Maxim, licențiat în matematici, inspector financiar. Str. Flondor 37, Cernăuți.

Balasz D., ing., asistent la Șc. Politechnică Str. Gen. Joffre 12, Timișoara.

Bănărescu M., ing. la atelierele C. F. R., profesor la Șc. Politechnică, Str. Doja 51, Timișoara.

Blășian V., inginer de mine, subdirector general al Soc. Reșița, profesor la Școala Politechnică. Str. Lonovici, Timișoara.

Chivulescu C. Chivu, licențiat în matematici, inspector financiar. Târgoviște.

Cizmărescu M., licențiat în matematici, subinspector financiar. T.-Severin.

Corneanu P., ing. la direcția reg. C. F. R. asistent la Șc. Politechnică Timișoara.

Derigault A., licențiat în fizică și electrotechnică, asistent la Șc. Politechnică Timișoara.

Hubert M., inginer, profesor la școala de meserii, asistent la Șc. Politechnică Bul. Mihai-Viteazul 21, Timișoara.

Linteș I., Căpitan, Șc. de Artilerie Timișoara

Lupan Andrei, inginer, director la Soc. Reșița, profesor la Școala Politechnică. Str. Lonovici, Timișoara.

Severineanu Cornel, ing., subdirectorul serviciului tracțiune C. F. R., profesor la Școala Politechnică. Timișoara.

Toporescu E., doctor în chimie dela Sorbona, conferențiar la Școala Politechnică Timișoara.

Vasiliu Gh., ing. la depoul C. F. R. asistent la Șc. Politechnică. Str. Gen. Foch 25, Timișoara.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL III. — No. 3. TIMISOARA, 15 MAI 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

SERII CONVERGENTE ȘI SERII DIVERGENTE

de TRAIAN LALESCU

1. In matematicile de liceu, se întâlnește pentru întâia oară noțiunea de serie când se studiază transformarea fracțiilor ordinare în zecimale. Dacă luăm de pildă fracția $\frac{7}{11}$ și facem împărțirea căpătăm fracția zecimală periodică simplă 0.63636363 . . . ., cu un număr infinit de zecimale și care se mai poate scrie și astfel:

$$(1)\quad \frac{6}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\ldots+\frac{6}{10^{2n-1}}+\frac{3}{10^{2n}}+$$

Aceasta este forma sub care se scriu seriile, cari sunt deci niște sume de un număr infinit de termini bine determinați scriși toți după o regulă anumită, regulă care caracterizează seria.

Expresiunea generală a unei serii este:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

iar termenul u_n se numește *termenul general*.

2. O particularitate a seriei (1) este că, cu cât luăm mai mulți termeni, cu atât suma lor se apropie mai mult de $\frac{7}{11}$, căci aceasta revine la a împinge împărțirea din ce în ce mai departe, și noi știm că *restul* împărțirii este mai mic ca unitatea zecimală a ultimei cifre a câtului. Deci dacă luăm n termeni în seria (1), suma lor diferă de $\frac{7}{11}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10^n}=0.000\ldots01$ (cu n zecimale). Seria (1) se bucură deci de proprietatea că dacă facem pe n să crească necontenit suma:

$$(2)\quad u_1+u_2+\ldots+u_n$$

crește mereu și se apropie din ce în ce mai mult de $\frac{7}{11}$ *așa de aproape cât voim noi,* fiindcă putem împinge împărțirea ori cât voim și la fiecare cifră a câtului, aproprierea se face mai mare, așa că diferența dintre $\frac{7}{11}$ și sumele succesive poate deveni mai mică de cât orice cătime am vrea noi.

In asemenea cazuri zicem că $\frac{7}{11}$ este limita sumei (2) când n crește nemărginit și acestei limite i se dă în cazul nostru numele firesc de *suma seriei* (1).

Asemenea serii ca (1), astfel că suma (2) tinde către o limită finită și bine determinată se numesc serii *convergente.*

Dacă însă sumele (2) în loc să tindă către o limită finită, ele se măresc din ce în ce mai mult așa că suma crește nemărginit, seria se zice *divergentă.*

Așa de pildă seria:

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots$$

este evident o serie divergentă.

3. Seriile sunt foarte utile în matematicele superioare și se poate spune că teoria lor este la baza matematicilor superioare, după cum sistemul numerelor raționale și irationale stă la baza aritmeticii și algebrii.

De pildă, în mecanica cerească, unde astronomii trebue să calculeze pozițiile planetelor din decursul anilor, sau să prevadă eclipsele de soare ori de lună sau să stabilească data echinoxurilor de primăvară, cantitățile ce trebue determinate sunt toate exprimate prin asemenea serii.

De aceia a fost nevoe să se facă un studiu amănunțit al acestor expresiuni matematice și acest

studiu face astăzi obiectul unui capitol important din Analiză numit *Teoria Seriilor;* alcătuitorii programelor din 1901 la noi, au crezut nemerit să le introducă chiar în liceele noastre, cu toate că asupra acestui fapt s'ar putea sta puțin la vorbă.

Ce este important a se ști mai întâi și întâi?

De sigur, că știm, dacă o serie dată este convergentă sau divergentă. Pentru aceasta s'au stabilit o mulțime de reguli practice cari se aplică ușor în cazurile obișnuite și care se învață pe larg în cursurile de Algebră Superioară. Nu este intenția mea să insist aci asupra acestor reguli cunoscute. Un spirit logic ar putea însă întreba: Nu e posibil se se găsească un singur criteriu, care să tranșeze hotărît în toate cazurile dacă o serie este convergentă ori divergentă și să simplifice astfel tot acest domeniu?

Răspunsul este negativ. Un matematician învățat Paul Dubois Reymond a arătat că orice „criteriu de convergență" s'ar descoperi, se poate imediat da un exemplu de serie căruia acest criteriu să nu-i poată fi aplicabil. Această teoremă ciudată care înfrânge sforțările noastre nu poate fi ușor asimilată nici de cei cari știu destulă matematică ca să urmărească pe deplin demonstrația sa logică, căci ea e în legătură cu o noțiune abstractă și foarte delicată, aceia a gradului de creștere a infiniților mari.

4. Pentru a ne da totuși puțin seama de această chestiunea, vom spune că practica a arătat că pentru ca o serie convergentă să fie utilă la calcule, nu e destul să fie convergentă, dar e nevoe să fie *repede* convergentă, adică să ne fie de ajuns să adunăm numai câțiva termeni la început, pentru a obține cu destulă aproximație, suma seriei.

A doua chestiune care trebue deci studiată în teoria seriilor este aceasta:

Cât de repede converge o anumită serie convergentă? Cât de încet diverge o serie divergentă?

Este evident că toți calculatorii o să ceară matematicianilor să le servească serii cât mai repede convergente. Sunt unele cazuri excepționale, de pildă în teoria lunei, când seriile găsite de matematiciani pentru expresiunea unei coordonate cerești sunt serii divirgente. In acest caz, se întâmplă totuși că divirgența acestor serii este de o natură specială: suma care are termini și pozitivi și negativi, se apropie pânăla un moment destul de aproape de cantitatea căutată, dar apoi se depărtează și crește nemărginit. Asemenea serii divergente pot de asemenea fi utilizate în practică, în lipsă de altceva mai bun, dar și aci vor fi preferate acele serii divergente cari divergează mai încet.

Pentru a înțelege bine aceste lucruri cari sunt foarte utile în matematici, s'au gândit învățații să le lămurească prin exemple concrete.

Iată aci un tablou, luat din cartea „Orders of infinity" de G. Hardy, care este foarte instructiv.

a). Să luăm întâi seria bine cunoscută geometrică:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

această serie este convergentă pentru $|x|<1$ și are ca sumă $\frac{1}{1-x}$.

Să ne punem întrebarea: Câți termeni trebue adunați pentru a căpăta suma seriei cu două zecimale exacte:

Iată răspunsul:

Dacă $x=0{,}1$, e de ajuns 3 termeni.

„ $x=0.5$ trebue 9 termeni.

„ $x=0{,}9$ trebue 73 termeni.

Concluzia: Seria geometrică nu mai este destul de „bine convergentă" dacă x e mai mare ca 0.5.

6. Să luăm seria armonică generalizată:

$$(3)\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

Această serie este convergentă numai dacă $\alpha>1$ și valoarea sa este o funcțiune de α, care se însemnă în matematici prin $\zeta(\alpha)$ și se numește funcțiunea lui Riemann.

Să luăm și aci câteva valori particulare date lui α și să ne punem aceiași întrebare ca mai sus.

Dacă $\alpha=10$ un singur termen e de ajuns pentru a avea suma seriei cu două cifre zecimale exacte, această sumă fiind 1.0009846...

Dacă $\alpha=2$, numărul termenilor necesari trece dintr'o dată la 200; sumă seriei este $\frac{\pi^2}{6}=1.64493$ iar dacă $\alpha=1{,}5$ avem nevoe de 160.000 termeni; suma seriei este 2,612...

In sfârșit pentru $\alpha=1{,}1$, numărul termenilor

necesari atinge valoarea formidabilă de 10^{33} pentru a căpăta suma 10,58 a seriei în acest caz.

Se vede de aci că seria (3) este foarte puțin potrivită pentru calcularea valorilor funcțiunei lui Riemann, când α are valori > 2.

c) Serii foarte convergente sunt seriile exponențiale și înrudirile sale.

Pentru seria

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+$$

a cărei sumă este numărul $e=2{,}718282\ldots$, e de ajuns 6 termeni pentru a avea două zecimale exacte.

O serie încă și mai convergentă este seria

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

a cărei sumă este 1,291286..., și pentru care sunt de ajuns 3 termeni pentru a obține două zecimale exacte.

d). Serii foarte *încet* convergente, sunt seriile convergente, ultra armonice.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2(\log 2)^2}+\ldots+\frac{1}{n(\log n)^2}+\ldots$$

$$\frac{1}{3\log 3(\log\log 3)^2}+\ldots+\frac{1}{n\log n(\log\log n)^2}+\ldots$$

Suma primei serii este 2,11, suma seriei a doua este 38,43... Aceste serii convergează așa de greu încât pentru a doua care e totuși ceva mai convergentă, trebue mai mult de 7×10^{86} termeni pentru a căpăta două zecimale exacte, iar în cazul întâi numărul termenilor necesari este egal cu

$$10^{\times 10^{86}}$$

număr mai mare decât distanțele dela pământ până la stelele cele mai depărtate exprimate în metri!

2). Exemple analoage pot fi date pentru serii divergente.

Așa de pildă seria armonică:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+$$

care e divergentă, e foarte încet divergentă căci trebue peste 12.000 termeni pentruca suma ei să fie mai mare ca 10.

Seria:

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots+\frac{1}{n\log n}+\ldots$$

devine mai mare ca 10, numai peste 10^{4300} termeni, iar seriei:

$$\frac{1}{3\log 3\log\log 3}+\ldots+\frac{1}{n\log n\log\log n}+\ldots$$

îi trebue $10^{10^{100}}$ pentru același lucru!

E destul să ne amintim că aceste serii sunt primele două din șirul infinit de serii divirgente, al căror termen general este

$$\frac{1}{n\log n\log_2 n\ldots\log_k n}$$

pentru a avea o idee, încă foarte vagă, de varietatea nesfârșită a gradelor de convergență și divergență a seriilor.

NOTE MATEMATICE

Asupra problemei 179, pag. 173 R. M. T., anul II, No. 11.

Această problemă se poate generaliza. Fie de calculat suma:

$$S_p=2(2p-1)\sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)\ldots(k^2-p^2)}$$

Luând:

$$f(x)=\frac{2x-1}{(x-p)(x-p+1)(x-p+2)\ldots(x+p-1)}$$

vom avea $f(x+1)=$

$$\frac{2x+1}{(x-p+1)(x-p+2)(x-p+3)\ldots(x+p)}$$

Rezultă: $f(x)-f(x+1)=$

$$\frac{(2x-1)(x+p)-(2x+1)(x-p)}{x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)\ldots(x^2-p^2)}$$

$$=\frac{2(2p-1)}{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)\ldots(x^2-p^2)}$$

Având în vedere identitatea:

$$\sum_{k=p+1}^{n} f(k) - f(k+1) = f(p+1) - f(n+1)$$

și ținând seamă de cele de mai sus, obținem:

$$S_p = \frac{2p+1}{1.2.3\ldots(2p)} - \frac{2n+1}{(n-p+1)(n-p+2)(n-p+3)\ldots(n+p)} \quad (1)$$

Pentru $p=2$ suntem în cazul problemei 179. Făcând această înlocuire în (1) găsim:

$$S_2 = \frac{5}{1.2.3.4} - \frac{2n+1}{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}$$

Observațiune. Pentru $n=\infty$, relația (1) devine:

$$\lim_{n=\infty} S_p = \frac{2p+1}{(2p)!}$$

obținând astfel suma unei serii importante.

Se ajunge la același rezultat, întrebuințând un procedeu analog soluției a doua date problemei 179, însă prin calcule mai anevoioase, termenul general trebuind să fie descompus în fracții simple.

STOENESCU AL. ION
cl. VII R. lic. Cantemir-Vodă Buc.

Aplicațiile unei identități geometrice.

Fie un triunghiu ABC și ceviana AM. Avem egalitatea evidentă:

(1) aria ABC = aria ABM + aria ACM

care se mai scrie:

$$(1)'\quad 2S = \overline{AB}\cdot\overline{AM}\sin\alpha + \overline{AC}\cdot\overline{AM}\sin(A-\alpha)$$

α fiind unghiul BAM.

Iată aplicațiile despre cari este vorba:

1). Dacă ceviana AM este chiar înălțimea h_a, atunci avem:

$$(2)\quad a\,h_a = c\,h_a\sin(90^0 - B) + b\,h_a\sin(90^0 - C)$$

și obținem relația clasică cunoscută:

$$a = c\cos B + b\cos C.$$

2). Când AM este bisectoarea interioară, relația (1)′ devine:

$$(3)\qquad 2S = c\cdot i_a\sin\frac{A}{2} + b\cdot i_a\sin\frac{A}{2}$$

de unde

$$i_a = \frac{2S}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

care se obține mai ușor pe această cale. Asemenea și expresiunea cunoscută pentru bisectoarea exterioară.

In acest caz, $\alpha = 90^0 + \frac{A}{2}$ și avem:

$$2S = l_a\left[c\sin\left(90^0+\frac{A}{2}\right) - b\sin\left(90^0+\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$= l_a\cos\frac{A}{2}(c-b)$$

de unde

$$l_a = \frac{bc\sin A}{(c-b)\cos\frac{A}{2}} = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(c-b)\cos\frac{A}{2}} = \frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{c-b}$$

N. I. CIORANESCU

Câteva identități trigonometrice.

Fie identitatea:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

Derivând căpătăm:

$$\frac{1}{\cos^2 2x} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x\,(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}$$

sau

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 2x} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}$$

In acelaşi mod, din:

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1 - 6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

$$\cot 3x = \frac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1}$$

căpătăm respectiv identităţile:

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 4x} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^3}{(1 - 6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)^2}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x} = \frac{1 + \cot^2 x}{4\cot^2 x}$$

$$\frac{\sin x}{\sin 3x} = \frac{1 + \cot^2 x}{3\cot^2 x - 1}$$

Fie în fine însumarea trigonometrică *):

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} \operatorname{tg} 2^{1-p} x = \frac{1}{2^{n-1}} \cot 2^{1-n} x - 2\cot 2x.$$

Derivată ne dă:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{2p-2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2^{1-p} x} = -\frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 2^{1-n} x} + \frac{4}{\sin^2 2x}$$

D. Panaitescu
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociaţiei de matematici pure şi aplicate, anul II, No. 8, Aprilie 1923. Les séries trionométriques, de *Tr. Lalescu.* O reprezentare specială a dreptelor echiresultante de *G. Nichifor.*

Gazeta Matematică, Anul XXVIII, No. 8, Aprilie 1923. Asnpra unei transformări geometrice de, *Mihail Ghermănescu.*

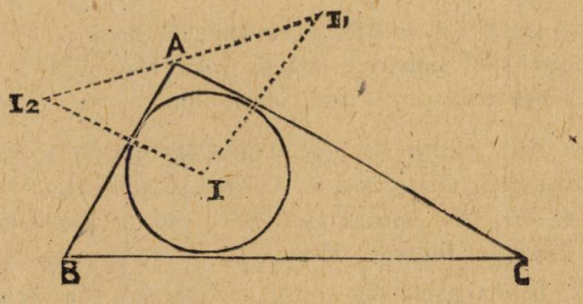
*) Citată în R. M. T. vol. II, p. 19.

PROBLEME REZOLVATE

58. — *Să se construiască un triunghiu dreptunghic cunoscând simetricele* I_1, I_2 *ale centrului cercului înscris triunghiului în raport cu cele două catete şi raza cercului circumscris.*

Aug. Coman

Soluţie dată de d-nii: *Coşereanu I.* (Timişoara), *Dinu Gh. C-tin* (lic. Piteşti), *Focşeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Hrysanide D.*, *Iliescu I. Ion* (lic. Galaţi), *Katz Pincu* (lic. Galaţi), *Lemeş Michel, Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Negretzu Florea* (lic. Piteşti), *Popescu Mircea* (Călăraşi), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Rizescu Ion* (Buşteni), *Săndulescu Corneliu, Săvescu M. Gh.* (lic. Iaşi), *Schileru Dili* (lic. Craiova) *Şerbănescu M. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), şi *Berdan I. C.* (Bârlad).



Presupunem problema rezolvată, A B C triunghiul cerut şi R raza cercului circumscris. Observăm pe figură că II_1 şi II_2 sunt respectiv paralele cu catetele triunghiului A B C şi mari cât dublul razei cercului înscris I, rezultă că triunghiul $I_1 I I_2$ este isoscel şi dreptunghic şi deci I se află pe cercul descris pe $I_1 I_2$ ca diametru. Cum A e egal depărtat de I, I_1 şi I_2 rezultă că se află pe $I_1 I_2$ în mijlocul său. Urmează următoarea construcţie. Din A mijlocul lui $I_1 I_2$ ca centru descrim un semicere şi ridicăm pe $I_1 I_2$ o perpendiculară

care taie semicercul în I. Ducem din A perpendiculara pe II_1 și II_2 și obținem direcțiile catetelor triunghiului cerut. Rămâne să fixăm pe aceste direcții duse, vârfurile B și C, și ar fi de ajuns a avea cunoscute IB sau IC. Observăm însă că IB și IC sunt laturile triunghiului IBC, care se poate construi, fiindcă îi cunoaștem o latură $BC = 2R$, unghiul opus, $\sphericalangle BIC = 135^0$ și înălțimea corespunzătoare, egală cu $\frac{II_1}{2}$. Această problemă este însă cunoscută. Pe un segment $MN = 2R$ descrim un arc capabil de 135^0 pe care îl tăiem cu o paralelă la MN la o depărtare de ea egală cu $\frac{II_1}{2}$, în punctele P și P_1. Avem astfel triunghiurile PMN și P_1MN, în condițiile voite. Aceste triunghiuri auxiliare odată construite, din I cu $IB = PM$ sau P_1M tăiem una din catele duse din A, în B și din B ducem o tangentă cercului înscris I de rază $\frac{II_1}{2}$ care va tăia cealaltă catetă în C. Triunghiul ABC este cel căutat.

Observare. Construcția e posibilă, numai dacă triunghiul PMN se poate construi, adică dacă $II_1 < 2R$. In acest caz avem 2 soluții deoparte a lui I_1I_2 și două soluții simetrice față de I_1I_2 de cealaltă parte.

Dacă $I_1I_1 = 2R$, avem numai două 2 soluții care sunt simetrice față de I_1I_2. Dacă $I_1I_2 > 2R$ construcția cerută este imposibilă.

Altă soluție dată de d-nii: *Dumitrescu S. Pavel* (Pitești), *Georgescu I. C.* (lic. Craiova), *Moisil C. Gr.* (lic. Spiru-Haret, București) și *Soceanu V. Em.* (lic. Internat, Iași).

Prima parte din soluția de mai sus, care ne permit aflarea direcțiilor catetelor duse din A se menține. Pentru a afla însă mărimea catetelor b și c a triunghiului ABC, vom observa că I_1, I_2 fiind cunoscute, cunoaștem și lungimea I_1I_2, care nu e decât diagonală patratului de latură $2r$ (r raza cercului înscris), avem astfel pe $2r$ și deci r. In triunghiul ABC cerut cunoaștem astfel R și r și observăm că $b + c = 2R + 2r$, așa că am redus chestiunea la construirea unui triunghiu dreptunghic căruia i se cunoaște ipotenuza și suma catetelor.

Construcția aceasta este însă cunoscută; se ia un segment $MN = 2R + 2r$ și din N ducem o dreaptă înclinată pe MN cu 45^0, care e tăiată de un arc de cerc descris din M ca centru ca 2R ca rază în punctele P și P_1. Din P și P_1 lăsăm perpendicularele PQ și P_1Q_1 pe MN și obținem triunghiurile PMQ și P_1MQ_1. Acum din A măsurăm pe direcțiile catelor lungimi egale cu catetele triunghiului PMQ sau P_1MQ_1 și obținem triunghiul cerut ABC.

Observare. Dacă arcul de cerc descris din M taie dreapta înclinată pe MN dusă prin N, adică dacă,

$$2R < (R + r)\sqrt{2}$$

avem 2 soluții pentru problema propusă de o parte a lui I_1I_2 și 2 soluții simetrice față de I_1I_2 de cealaltă parte.

Dacă $2R = (R + r)\sqrt{2}$, avem numai două soluții care sunt simetrice față de I_1I_2.

Dacă $2R > (R + r)\sqrt{2}$ construcția triunghiului ABC este imposibilă.

70. — *Să se demonstreze fără ajutorul derivatelor că expresia*

$$E = \arcsin(x - 1) + 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$$

este independentă de x.

AUG. COMAN

Soluție dată de d-nii: *Berdan C.*, *Cocorăndu M.* (lic. Brașov), *Cosereanu I.* (Timișoara), *Popeanu G. A.* (Constanța), *Silion G. Ion* (Câmpina), *Vicoveanu C. V.* și *Katz Pincu* (Galați).

Notăm,

$$\arcsin(x - 1) = a, \quad 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} = b,$$

de unde,

$$x - 1 = \sin a, \quad x = 2\sin^2\frac{b}{2} = 1 - \cos b$$

De aici deducem:

$$x = 1 + \sin a = 1 - \cos b$$

$\overset{*}{**}$ $\sin a = -\cos b = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right)$

Arcele. a și $b - \frac{\pi}{2}$ având sinusurile egale, rezultă că:

$$a + b - \frac{\pi}{2} = (2k+1)\pi, \quad a - b + \frac{\pi}{2} = 2k\pi$$

sau,

$$a + b = (4k+3)\frac{\pi}{2}, \quad a - b = (4k-1)\frac{\pi}{2}$$

Atunci rezultă că,

$$E = a + b = (4k+3)\frac{\pi}{2}$$

deci independent de x.

Observare. Vedem că și.

$$E = \text{arc sin}\,(x-1) - 2\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{2}}$$

este independentă de x, fiindcă deducem:

$$E = a - b = (4k-1)\frac{\pi}{2}.$$

Altă soluție dată de d-nii: *Adam I. M.* (Constanța), *Antoniu S. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Dumitrescu S. Pavel* (Pitești), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Goilav Cristea*, *Hrysanidi D.* (lic. Constanța), *Lăzărescu Fl. Șt.*, *Marinescu V. Ion*, *Mărculescu B. Gh.* (lic. Lazăr, București), și *Rizescu Ion* (Constanța).

Notăm:

(1) $\text{arc sin}\,(x-1) = a, \quad \text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{2}} = b,$

deducem:

(2) $\sin a = x - 1, \quad \sin b = \sqrt{\frac{x}{2}}$

$\overset{*}{**}$ $\cos a = \pm\sqrt{x(2-x)}, \quad \cos b = \pm\sqrt{\frac{2-x}{2}}$

Expresia dată ținând seamă de (1), devine:

$$E = a + 2b$$

$\overset{*}{**}$ $\sin E = \sin(a+2b) = \sin a \cos 2b + \cos a \sin 2b$

$$= \sin a - 2\sin a \sin^2 b + 2\cos a \sin b \cos b$$

Ținând seamă de relațiile (2) și luând convenabil semnul radicalelor, avem:

$$\sin E = x - 1 - (x-1)x - x(2-x) = -1$$

Deducem,

$$E = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = (4k-1)\frac{\pi}{2}$$

deci independent de x.

101. — *Zece soldați: doi munteni, doi ardeleni, doi basarabeni, doi bucovineni și doi dobrogeni sunt așezați în rând într'o ordine oarecare. Comandantul lor voind să-i așeze câte doi pe provincii, a reușit a o face mutând totdeauna un soldat peste alți doi. Cum au fost ei așezați la început, dacă primul soldat a fost muntean și grupele de câte doi se succedă în ordinea citată mai sus.*

I. DIMITRIU-ARAD

Soluție dată de d-l *C. Biernaschi.*

Dacă primul soldat a fost muntean, al doilea soldat muntean a fost depărtat cu doi soldați de camaradul său. Analog pentru dobrogeni care închee frontul. Rezultă că acești patru soldați sunt depărtați între ei de câte alți doi soldați; iar frontul până în prezent ar fi:

Munt.... Munt.... Dobr.... Dobr.

Pentru ca grupa ardelenilor cât și acea a bucovinenilor să poată fi respectiv lângă cea a muntenilor și dobrogenilor va trebui ca fiecare să aibă câte un reprezentant pe lângă grupele respective. Frontul a fost deci astfel:

Mu.	Ar.	Bas.	Mu.	Ar.	Bu.	Do.	Ba.	Bu.	Do.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Așezarea în grupuri pe provincii se face mutând 4 la 1, 7 la 10, 8 la 3, 5 la 2 și bucovinenii rămân alături.

Soluții analoage au fost date de d-l *Iordache N. Ioan* student (C.-de-Argeș).

2. Soluție dată de d-l *Cocorandu M.* (Brașov). Dacă ținând seamă că pentru a se ajunge la gruparea pe provincii mutarea s'a făcut succesiv și regulat din doi în doi, urmează că din ordinea ultimă pentru a ajunge la ordinea inițială trebue a face aceiași mutare succesiv și regulată din doi în doi, mutând totdeauna al doilea din grupul de doi peste alți doi, vom avea deci frontul inițial:

Mu. Ar. Mu. Ba. Ar. Bu. Ba. Do. Bu. Do. și pentru a-i aduce în grupuri mutările 2 la 5, 6 la 9, 8 la 10, 4 la 7 și muntenii rămân alături.

Soluții analoage date de d-nii: *P. Dumitrescu* (student, Pitești), *Gh. Grofșorean* (cl. VI, Arad) și *Solomon L. Weis* (lic. Galați).

D-l *Popescu N. Cornel* elev. cl. III (Giurgiu), a presupus primii 5 soldați au fost așezați în ordinea cerută grupurilor și a obținut așezarea Mu. Ar. Ba. Mu. Bu. Ar. Do. Ba. Do. Bu. cu mutările 4 la 1, 6 la 2, 8 la 3, 10 la 5 și Do. rămân alături.

Observația I. Deși problema n'a avut restricțiuni totuși nu se putea înțelege că soldații au fost așezați pe două rânduri. cum au înțeles unii corespondenți. Interesul a fost ca soldații să fie considerați cât mai amestecați în așezarea inițială.

Observația II. Printr'un raționament analog cu cel dela soluția I se obține așezarea:

Mu. Ar. Ba. Mu. Bu. Ar. Ba. Do. Bu, Do. cu mutările 4 la 1, 7 la 3, 5 la 9, 6 la 2 și 8 la 10.

I. D.

132. — *Să se determine m întreg, așa ca expresiunea,*

$$E = m \cdot 2^{12k-1} + 1$$

să fie divizibilă cu 105.

A. Th. Nicolau

Să considerăm expresiunea,

$$2E = m \cdot 2^{12k} + 2$$

Evident pentru ca $2E$ să fie divizibil cu 105, trebuie ca E să fie divizibil cu 105, fiindcă 105 e prim cu 2. Vom determina deci pe m astfel ca $2E$ să fie divizibil cu 105, adică,

$$m \cdot 2^{2k} + 2 = \text{mult. } 105.$$

Cum,

$$2^{12} = 4096 = \text{mult. } 105 + 1,$$

avem:

$$m(\text{mult. } 105 + 1)^k + 2 = \text{mult. } 105,$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \text{mult. } 105 + m + 2 = \text{mult. } 105.$$

Pentru ca primul membru să fie multiplu de 105, trebuie ca,

$$m + 2 = \text{mult. } 105$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad m = \text{mult. } 105 - 2.$$

Pentru m putem lua deci valorile:

103, 208, 313, 418.

Soluțiuni bune date de d-nii: *Adam M.* (Constanța), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Berdan C.*, *Bonea Ion* (lic. M-rea Dealu). *Brăileanu Al.* (lic. Constanța), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Coșereanu Ioan* (Timișoara), *Dobrescu-Băbici* (lic. Caracal), *Dospinoiu M.* (conductor de lucrări publice), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București). *Goilav P. Cristea* (Tecuci), *Grünfeld Maximilian* (lic. Brăila), *Iliescu E.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Ilie-Brezuică* (lic. Caracal), *Miclescu B. Andrei* (Șc. Militară de Artilerie), *Moroianu At.* (lic. Constanța), *Negretzu Florea* (Pitești). *Neștianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Niculescu Alexandru* (lic. Sf. Sava, București), *Niculescu Valeriu*, *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solomon Wilhelm* (lic. Matei-Basarab, București), *Ștefănescu Emil*, *Stoenescu Ioan* (lic. Cantemir, București), *Taubner Alexandru* (lic. Botoșani), *Teodoru St. Nicuță* (Huși), și *Ulman Octav* (Timișoara).

Observare. D-l *Georgescu Er. Florian* a generalizat chestiunea, determinând pe m astfel ca,

$$m \cdot 2^{12k-n} + n$$

să fie divizibilă cu 105. Același mers de mai sus îl conduce că m trebuie să fie de forma:

$$m = \text{mult. } 105 - n \cdot 2^n$$

In mod analog d-sa stabilește că:

a) $E = m \cdot 3^{8k-1} + 1$, este multiplu de 205, pentru $m = \text{mult. } 205 - 1$.

b) $E = m^2 . 5^{3n} - 8m + 15$, este multiplu de 124, pentru $m =$ mult. $124 + 3$ sau $m =$ mult. $124 + 5$.

137. — *Să se determine α și β astfel ca limita expresiunei,*

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \alpha x - \beta$$

să fie egală cu 1 când x crește nemărginit.

N. ABRAMESCU

Insemnând cu E expresiunea dată, putem scrie:

$$E = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - \alpha - \frac{\beta}{x}\right)$$

Pentru $x = \infty$, primul factor a lui E este infinit, iar paranteza se reduce la:

$$(1) \qquad \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} - \alpha.$$

Dacă această expresiune ar fi finită și diferită de zero, limita lui E pentru $x = \infty$, ar fi ∞; pentruca această limită să fie finită se impune ca expresiunea (1) să fie nulă, adică

$$\alpha = 2\sqrt[3]{1}$$

fiindcă E în acest caz se prezintă sub forma $\infty \times 0$ și poate avea o valoare finită când x tinde către ∞.

Așa dar pentru α, avem valorile,

$$\alpha = 2 \quad \text{și} \quad \alpha = -1 \pm i\sqrt{3}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

Rămâne a determina pe β.

Dacă luăm $\alpha = 2$, avem succesiv:

$$E = (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x) + (\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x) - \beta$$

$$= \frac{x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + x^2} +$$

$$\frac{x + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + x + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + x + 1} + x^2} - \beta$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} +$$

$$\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + 1} - \beta$$

Luând limita pentru $x = \infty$, găsim:

$$\lim_{x=\infty} E = \frac{1}{2\sqrt[3]{1} + 1} - \beta$$

Cum vrem ca această limită să fie 1, rezultă că

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt[3]{1} + 1} - 1,$$

expresiune care dă pentru β o valoare reală și două imaginare, anume:

$$\beta = -\frac{2}{3} \quad \text{și} \quad \beta = \pm\frac{1}{2i\sqrt{3}} - 1 = -\frac{6 \pm i\sqrt{3}}{6}$$

Dacă luăm acum $\alpha = -1 \pm i\sqrt{3}$, avem:

$$E = \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}x\right) +$$

$$\left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{1}x\right) = \beta$$

Multiplicând expresiunile din paranteze cu conjugatele lor și divizând cu x^2 ambii termeni ai celor două fracții și luând limita pentru $x = \infty$, găsim:

$$\lim_{x=\infty} E = \frac{1}{\sqrt[3]{1}\left(1 + \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}} - \beta =$$

$$\frac{2}{(1 \pm i\sqrt{3})(\sqrt[3]{1} - 1)} - \beta$$

Cum vrem ca această limită să fie 1, rezultă că,

$$\beta = \frac{2}{(1 \pm i\sqrt{3})(\sqrt[3]{1} - 1)} - 1.$$

Inlocuind $\sqrt[3]{1}$ cu valorile sale 1, și $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

rezultă:

$$\beta = \infty \quad \text{și} \quad \beta = \frac{5 + i\sqrt{3}}{-3 \mp i\sqrt{3}}$$

Valoarea $\beta = \infty$ o lăsăm la o parte, neputând obține 1 pentru limita E când $x = \infty$.

Așa dar dacă $\alpha = -1 \pm i\sqrt{3}$. vom lua

$$\beta = \frac{5 + i\sqrt{3}}{-3 \mp i\sqrt{3}}$$

Nici unul din corespondenții ce au trimes soluțiuni la această problemă, nu s'au preocupat de valorile imaginare a lui α și β, deși în enunț nu se făcea această restricțiune.

Au determinat valorile reale a lui α și β, d-nii: *Antoniu S. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Arcadian Nicu* (lic. Caracal), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Brăileanu Alexandru* (lic. Constanța), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Coșereanu Ion* (Timișoara), *Dobrescu-Băbici, Dospinoiu N.* (con-tor de lucrări publice), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Goilav Cristea* (Tecuci), *Iliescu Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Ilie* (lic, Caracal), *Ionescu S. Longin* (Caracal), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (lic. Galați), *Nicolau M. Iulian* (lic. Ploești), *Popea Gh. Ovidiu* (Kișinău), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Propst A. Jean, Rizescu Ion* (Bușteni), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Stoenescu I.* (lic. Cantemir, București), *Taubner Alexandru* (lic. Botoșani), *Ulman Octav* (Timișoara) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

Observări. 1) D-l *Georgescu Er. Florian*, generalizează chestiunea, determinând α și β astfel ca limita expresiunei

$$E = \sqrt[n]{a x^n + b x^{n-1} + c} + \sqrt[n]{a x^n + b x^{n-1} + c} - \alpha x - \beta$$

să fie m, când x crește nemărginit. Procedând în mod analog găsește $\alpha = 2$, $\beta = m - \frac{b}{n}$. Valorile imaginare a lui α și β nu-l preocupă.

Când, $a = b = c = m = 1$ și $n = 3$, suntem în cazul problemei tratate.

Tot d-sa observă, că dacă în problemă se înlocuește x prin $\operatorname{tg} x$, rezultatele găsite se mențin.

2. D-nii *Antoniu S. Ion*, *Coșereanu Ioan*, *Focșeneanu I. M.* și *Iliescu Emilian*, au observat că generalizarea problemei se găsește în „Gazeta Matematică", vol. XIV, pag. 175.

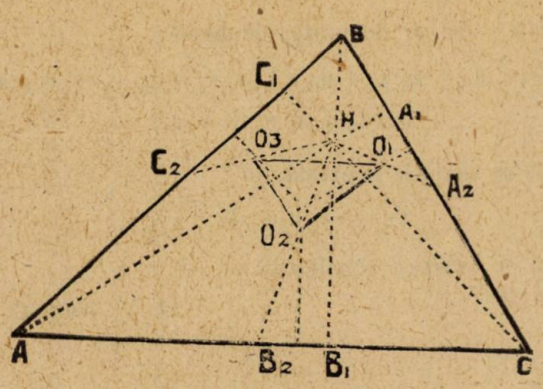
3. D-nii *Popea Gh. Ovidiu* și *Uiman Octav* observă că o generalizare mai întinsă a problemei este în „Culegere de Probleme" de d-l A. Gh. Ioachimescu, Cap. VI, problema 35.

139. — *Fie* H *punctul de întâlnire al înălțimelor*, A_1, B_1, C_1 *picioarele lor* A_2, B_2, C_2 *picioarele medianelor unui triunghiu* ABC. *Fie* O_1, O_2, O_3 *centrele cercurilor* A_1A_2H, B_1B_2H, C_1C_2H. *Să se arate că centrul cercului lui Euler (celor 9 puncte) al triunghiului* ABC *este ortocentru triunghiului* $O_1O_2O_3$.

I. T. RIZESCU

Soluțiuni date de d-nii: *Adam M.* (Constanța), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bobârnac Mircea, Brăileanu Alexandru* (lic. Constanța), *Coșereanu Ion* (Timișoara), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu) *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *Georgescu-Roegen* (lic. M-rea Dealu), *Ghițescu Gr. Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, București), *Katz Pincu* (Galați), *Oprișeanu G. Ernest, Niculescu Alexandru* (lic. Sf. Sava, București), *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), *Popa I. Teodor, Popeanu G. A.* (Constanța), *Popescu N. Ștefan* (Pitești), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Șerbănescu Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Scodreanu M.* (Durostor), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Teodorescu St. I.* (lic. Ploești), *Bușilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Moroianu Atanase* (Constanța), *Popea Ovidiu* (lic. Chișinău) și *Udrisky Traian* (lic. Arad).

Triunghiurile A_1A_2H, B_1B_2H, C_1C_2H fiind dreptunghice centrele O_1, O_2, O_3 se află în mijloacele ipotenuzelor lor HA_2, HB_2, HC_2. In triunghiul A_2HB_2, O_1O_2 unind mijloacele laturilor HA_2 și HB_2, este paralelă cu A_2B_2 și deci și cu AB. Tot astfel arătăm că O_1O_3 este paralelă cu AC și O_2O_3 este paralelă cu BC. Rezultă astfel că laturile triunghiului $O_1O_2O_3$ sunt paralele cu acelea ale triunghiului dat ABC, deci și înălțimele lor sunt paralele; înălțmiea dusă din O_1 pe O_2O_3 este deci paralelă cu A_1A_2, și trecând prin mijlocul lui HA_2, trece și prin mijlocul lui A_1A_2. Tot astfel



înălțimea dusă din O_2 pe $O_1 O_3$ trece prin mijlocul lui $B_1 B_2$ și înălțimea din O_3 pe $O_1 O_2$ trece prin mijlocul lui $C_1 C_2$. Pe dealtă parte știm că cercul lui *Euler* al triunghiului ABC, trece prin punctele, $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ deci centrul său se găsește pe perpendicularele duse pe $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ în mijlocul lor, adică tocmai pe înălțimele triunghiului $O_1 O_2 O_3$ confundându-se cu ortocentrul lui.

181. — *Să se verifice identitatea:*

$$(a^2 + x^2 + y^2)(b^2 + u^2 + v^2) - (a b - u x - v y)^2 = (a u + b x)^2 + (a v + b y)^2 + (u y - v x)^2$$

E. ABASOHN

Desvoltând primul membru și observând reducerile, avem:

$$(1)\quad (a^2 + x^2 + y^2)(b^2 + u^2 + v^2) - (a b - u x - v y)^2 = b^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 u^2 + u^2 y^2 + a^2 v^2 + v^2 x^2 + 2 a b u x + 2 a b v y - 2 u v x y.$$

Desvoltând și al doilea membru, găsim:

$$(2)\quad (a u + b x)^2 + (a v + b y)^2 + (u y - v x)^2 = a^2 u^2 + 2 a b u x + b^2 x^2 + a^2 v^2 + 2 a b v y + b^2 y^2 + u^2 y^2 - 2 u v x y + v^2 x^2.$$

Comparând membrii al doilea din egalitățile (1) și (2) constatăm că sunt egali, rezultă că și primii membri sunt egali și identitatea dată este verificată.

Soluții analoage date de d-nii: *Atanasiu C. Căpitan* (lic. Arad), *Berdan C.* (Tutova), *Bleiweis S.* (lic. Cantemir, București), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Bolgiu. B. Ovidiu* (lic. Cantemir, București), *Coșereanu Ion* (P.-Neamț), *Dumitrescu Furtună* (lic. Pitești), *Dimitriu Adrian* (lic. M-rea Dealu), *Dordea A. Traian, Dragomirescu-Buzne Eduard* (Șc. de Artilerie), *Dvoirin L., Dospinoiu N.*, (conductor de lucrări publice), *Ghidalisohn J.* (lic. Galați), *Grofșorean I. George* (lic. Arad), *Grümberg S. Herman* (lic. Galați), *Grünfeld B. M.* (lic. Brăila), *Goldemberg D.* (Galați), *Haimovici Salo* (lic. Galați), *Herscovici Em., Hilmu Vicior* (lic. Matei Basarab, București), *Hristhodor P. Nicolau* (Ploești), *Iliescu D. Ștefan* (Caracal), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, București), *Ionescu V. Gh.* (lic. Galați), *Ionescu B. Ion* (lic. Pitești), *Iordache N. Ion* (Curtea-de-Argeș), *Lindemberg Lyonel* (lic. Cantemir, București), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Kassargian A.* (lic. Cantemir, București), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Landes Felix* (lic. Arad), *Marinescu I. Aristide* (Caracal), *Mateescu Gh.* (lic. Galați), *Martin Rubinstein* (lic. Galați), *Măru D-tru* (lic. Galați), *Mehlman Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Meirovici Iacob* (lic. Botoșani), *Mihai Vasile, Mircea Adrian* (Constanța), *Mihai St. Grigore* (lic. Craiova), *Neștianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Niculae* (lic. Câmpina), *Panait Ion* (lic. Galați), *Percea Viorel* (lic. Timișoara) *Pinchis A. M.* (lic. Galați), *Pitea T. D-tru* (Timișoara), *Popea Gh. Ovidiu* (Kișinău), *Popescu Gh. A.* (Iași), *Popovici Th. Ioan, Oprișeanu Ernest* (București), *Septelici M. Raul* (Șc. de Artilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Segărceanu N.* (lic. Cantemir, București), *Stamatiu M., Stavrache Hristu* (lic. Galați), *Stănescu Mircea* (Craiova), *Steinbach Marcel* (lic. Cantemir, București), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Sufletel Aurel* (Șc. de Artilerie), *Vulpe Tiberiu* (lic. Timișoara), *Weissenberg Eugen* (lic. Galați), *Wetter Anna* (Câmpulung, Bucovina), *Weissler Doru* (Câmpina), *Zamfirescu Alex.* (Pitești), *Zamfirescu S. Andrei* (lic. Spiru Haret, București), *Apăteanu Camil* (lic. Arad), *Bobârnac C. Mircea* (Timișoara), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), Grabovski Eugen (lic. Orhei), Grofșorean I. Gh. (lic. Arad), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru Haret, București), *Landes Felix* (lic. Arad); *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iași), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina) și *Udrisky I. Traian* (lic. (Arad).

Observări. 1) D-nii *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici Chr. Ion* (lic. Galați), *Solacolu Mircea* (lic. Spiru Haret, București), *Taubner Alex.* (lic. Botoșani), *Weis Leon* (lic. Galați), și *Witzmann H. Marcu* (lic. Galați), au observat că identitatea dată se poate deduce din identitatea lui *Lagrange*,

$$(a^2 + x^2 + y^2)(b^2 + u^2 + v^2) - (a b + u x + v y)^2 = (a u - b x)^2 + (a v - b y)^2 + (u y - v x)^2,$$

dacă înlocuim u și v prin $-u$ și $-v$.

2) D-nii: *Dordea A. Traian, Niculescu Alex.* (lic. Matei Basarab, București), și *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), au stabilit identitatea mai generală,

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1 b_1 - a_2 b_2 - \ldots - a_n b_n)^2 =$$

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 + \ldots + (a_1 b_n + a_n b_1)^2 +$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \ldots + (a_2 b_n - a_n b_1) +$$
$$(a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + \ldots + (a_3 b_n - a_n b_2)^2 + \ldots +$$
$$(a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2,$$

arătând că desvoltând ambii membrii se obțin rezultatele egale.

PROBLEME PROPUSE

240. — Dacă diferența dintre prima și ultima cifră a unui număr oarecare este o cifră cu soț, să se arate că diferența dintre acel număr și răsturnatul său este divizibilă cu 6.

GRIGORE ZAPAN

241. — O sferă și un cub au același volum. 1) Se împart ambele volume în patru părți egale prin câte două plane perpendiculare ce trec prin centru și se compară câte o pătrime astfel obținută, care are suprafața mai mare? 2) Sfera și cubul având aceiași suprafață și fiind împărțite ca mai sus în patru părți egale, comparându-se câte o pătrime din fiecare, care are volumul mai mare?

CAPITAN I. LINTES

342. — Să se determine pe diagonala AC a patrulaterului ABCD un punct P, astfel ca ducând paralele PM și PN respectiv la BC și AD (M fiind pe AB și N pe DC), să avem:

$$PM \times AD = PN \times BC.$$

EMIL ȘTEFANESCU

343. — Să se arate că în orice triunghiu există relațiunea

$$S = p' R$$

p' fiind semi perimetrul triunghiului ortic.

I. COSEREANU și M. C. BOBARNAC

244. — Să se dezvolte produsul:

$$P = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) \times (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2).$$

Să se deducă expresia lui,

$$(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)^3$$

și să se verifice rezultatul.

D. V. IONESCU

245. — Ce se poate afirma de una din ecuațiile

$$a x^2 + 2 b x + c = 0$$
$$(b - a) x^2 + (c - a) x + c - b = 0,$$

dacă ele au o rădăcină comună.

TH. ANGHELUTA

246. — Să se efectueze suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{2^{2i} + 2^{i+1} + 2^{i-1} + 1}$$

V. ALACI

247. — Să se verifice identitatea:

$$\Sigma \sin 2a \sin(b + c) \sin(b - c) = 2 \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a).$$

MAIOR O. BUGEANU

248. — Se dă un segment AB de lungime constantă l care se reazimă pe două drepte perpendiculare Ox, Oy și face cu Ox unghiul α. Se construește pe AB un exagon regulat. Se cere coordonatele vârfurilor și centrului exagonului.

E. ABASOHN

249. — Un vagon cu trei osii depărtate între ele cu câte 4 m., în mersul său pe o linie ferată obicinuită, are grupuri de câte trei ciocănituri la intervale egale de timp, așa în cât ciocănîturile formează un șir continuu echidistant. Să se afle lungimea șinei.

V. VALCOVICI

INFORMAȚIUNI

D-l *Dr. Ing. C. Stăncescu*, profesor la Școala Politechnică din Timișoara și membru în comitetul de redacție al Revistei matematice din Timișoara, a donat pentru aceasta suma de lei 500. Mulțumim și pe această cale pentru sprijinul material, care vine alături de sprijinul moral pe care ni-l oferă d-l Stăncescu, prin partea activă ce o ia la redacțiunea și propunerea problemeior de fizică ce apar în paginile revistei noastre.

Anul I și II al R. M. T., se află broșat trângând în două volume, cele 12 numere ce apar anual. Se pot procura colecțiile dela Administrație în schimbul costului. Totuși volumele din anul I fiind foarte puține, nu se vor putea vinde separat, ci numai cu colecția întreagă. Astfel

Vol. I și Vol. II împreună 150 lei.
Vol. II separat 50 lei.

Banii se pot trimete prin mandat poștal pe adresa d-lui Ing. C. Teodorescu, subdirectorul Școlii Politechnice.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL III. 15 IUNIE 1923 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 5 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. VALCOVICI. BALANTA LUI QUINTENZ CU TREI PARGHII.
2. NOTE MATEMATICE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE.
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Şcoalei Politechnice din Timişoara-

---

ANUL III. — No. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

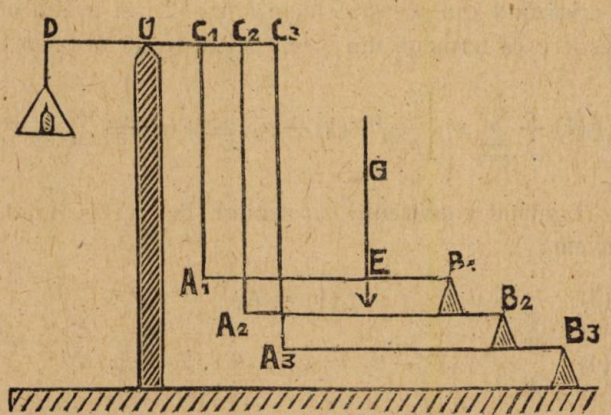
REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

BALANȚA LUI QUINTENZ CU TREI PARGHII DE BAZA

de V. VALCOVICI

Construcțiunea *balanței lui Quintenz* se bazează pe un principiu foarte ingenios, asupra căruia se insistă prea puțin în manualele obicinuite de Fizică și de Mecanică. Grație lui se capătă o cântărire independentă de locul unde se pune pe balanță corpul de cântărit.

Voi descrie, în cele ce urmează, o balanță care diferă de cea obicinuită a lui Quintenz numai prin numărul pârghiilor de bază: în loc de două cum are de obicei această balanță, vom presupune că e construită din trei pârghii de bază. Fie A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 cele trei pârghii legate de pârghia



superioară DC_3 prin intermediul a trei bare rigide verticale, cu articulațiuni în punctele C_1, C_2, C_3 și A_1, A_2, A_3. Balanța se sprijină pe sol în punctul B_3 și prin piciorul vertical din O.

Fie G greutatea de măsurat, aplicată în punctul E al pârghiei A_1B_1.

Toată dificultatea constă în a determina poziția punctelor fixe B_1, B_2, B_3 și C_1, C_2, C_3 astfel încât cântărirea să fie independentă de poziționea punctului E.

Pentru a evita o notație prea greoaie, voi pune:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{EB_1}{A_1B_1}=\alpha_1, \quad \dfrac{EA_1}{A_1B_1}=\beta_1, \\ \dfrac{B_1B_2}{A_2B_2}=\alpha_2, \quad \dfrac{A_2B_1}{A_2B_2}=\beta_2, \\ \dfrac{B_2B_3}{A_3B_3}=\alpha_3, \quad \dfrac{A_3B_2}{A_3B_3}=\beta_3. \end{cases}$$

Se deduce imediat relațiunea:

$$(2)\qquad \alpha_1+\beta_1=1.$$

Forța G se poate înlocui prin alte două paralele cu ea, una G_1 aplicată în punctul A_1 și alta G'_1 aplicată în B_1. Valorile lor sunt:

$$(3)\qquad G_1=G.\alpha_1,\quad G'_1=G\beta_1.$$

Forța G'_1 aplicată în B_2 pe pârghia A_2B_2 poate fi de asemenea înlocuită prin două forțe paralele cu ea G_2 și G'_2 aplicate respectiv în punctele A_2 și B_2. Valorile lor definitive:

$$(4)\qquad G_2=G\beta_1\alpha_2,\quad G'_2=G\beta_1\beta_2$$

se capătă ținând seama de valoarea lui G'_1 din (3).

In mod analog descompunem forța G'_2 aplicată în B_2 asupra pârghiei A_3B_3, în două forțe verticale, G_3 și G'_3, aplicate respectiv în A_3 și B_3 și având valorile:

$$(5)\qquad G_3=G\beta_1\beta_2\alpha_3,\quad G'_3=G\beta_1\beta_2\beta_3.$$

Forța G'_3 este anihilată de rezistența solului-Celelalte trei forțe G_1, G_2 și G_3 aplicate în A_1, A_2, A_3 își pot muta punctele lor de aplicație respectiv în C_1, C_2, C_3.

Asupra barei D O lucrează deci patru forțe verticale: P, G_1, G_2 și G_3 aplicate respectiv în punctele D, C_1, C_2 și C_3, în afară de reacțiunea punctului fix O. Aplicând teorema momentelor față de O și înlocuind pe G_1, G_2, G_3 prin valorile lor date de (3), (4) și (5) obținem:

$$(6)\quad P.OD = G(\alpha_1 . OC_1 + \beta_1\alpha_2 . OC_2 + \beta_1\beta_2\alpha_3 OC_3)$$

Pentru ca raportul între greutatea G și cea cunoscută P să nu depindă de poziția punctului E pe balanță, trebue neapărat că atât α_1 cât și β_1 să dispară din relațiunea precedentă (6).

Inlocuind pe β_1 prin valoarea sa $1 - \alpha_1$, relațiunea (6) devine:

$$(6)'\quad P.OD = G[\alpha_1 (OC_1 - OC_2 . \alpha_2 - OC_3\beta_2\alpha_3) + OC_2 . \alpha_2 + OC_3\beta_2\alpha_3]$$

Se vede că pentru dispariția lui α_1 este necesar și suficient să avem:

$$(7)\quad OC_1 - OC_2 . \alpha_2 - OC_3 . \beta_2\alpha_3 = 0.$$

In care caz relațiunea (6)′ se reduce la:

$$(8)\quad P.OD = G.OC_1.$$

De aici se deduce raportul între greutatea cântărită G și cea observată P a fi egal cu $\frac{OD}{OC_1}$ care poate fi luat prin construcțiune egal cu orice număr vrem, cu 10 de pildă pentru balanța zecimală.

Reușita construcțiunii se datorește posibilității de a realiza relațiunea (7) care face să dispară complect punctul E din relațiunea de legătură dintre G și P. Este evident că se pot construi balanțe care să satisfacă relațiunea (7), într'o infinitate de feluri, de oarece prin această relațiune nu se determină decât una din cele șase mărimi care intervin și care ne stau la dispoziție.

In mod analog se poate trata și balanța cu n pârghii de bază, n fiind orice număr întreg, pozitiv. Relațiunea (7) va conține atunci $\frac{n(n+1)}{2}$ mărimi de determinat, iar relațiunea (8) își va păstra forma.

Problema 88 din Revista Matematică din Timișoara, anul I, No. 11, este astfel rezolvată.

NOTE MATEMATICE

Asupra unei identități: In articolul, „Asupra câtorva însumări", din R. M. T. No. 7, an. II, intervine, și rezolvarea în $f(x)$ a identității:

$$(1)\quad f(x+1) - f(x) \equiv \varphi(x)$$

în care $\varphi(x)$ este un polinom dat. In cele de mai jos voi arăta, cum se poate obține această valoare.

Fie:

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_p x^p + \ldots + A_n x^n$$

polinomul dat. Din (1) rezultând că $f(x)$ este de gradul $n+1$, de oarece $\varphi(x)$ este de gradul n, și ținând seama că diferența $\varphi(x)$ rămâne aceiași, indiferent de valoarea termenului liber al lui $f(x)$, putem să-l luăm pe acesta egal cu zero. Avem deci dreptul a scrie:

$$(2)\quad f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_p x^p + \ldots + \alpha_{n+1} x^{n+1}$$

α_p $[p = 1, 2, 3, \ldots (n+1)]$ fiind niște coeficienți pe care urmează să-i determinăm. Aplicând formula lui Taylor, vom avea:

$$f(x+1) \equiv f(1) + x f'(1) + \ldots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(1) + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(1).$$

Scăzând din aceasta, identitatea (2), și având în vedere că termenii din urmă se distrug, obținem:

$$f(1) + \sum_{p=1}^{n} x^p \left[\frac{1}{p!} f^{(p)}(1) - \alpha_p\right] \equiv \varphi(x) \equiv \sum_{p=0}^{n} A_p x^p$$

Egalând coeficienții termenilor de același grad, avem:

$$(3)\quad f(1) = A_0$$

$$(4)\quad \frac{1}{p!} f^{(p)}(1) - \alpha_p = A_p \quad (p = 1, 2, 3, \ldots n)$$

Am obținut astfel un sistnm de $n+1$ ecuațiuni cu $n+1$ necunoscute, din a cărui rezolvare, găsim foarte ușor valorile corespunzătoare necunoscutelor:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$$

$f(x)$ este deci complect determinat.

Observațiunea I. Obținerea sistemului de mai sus, nu implică numai decât cunoașterea formulei lui Taylor, de oarece se poate căpăta dezvoltând direct pe $f(x+1)$ cu ajutorul binomului lui Newton, aranjând diferența $f(x+1)-f(x)$ după puterile lui x și identificând cu $\varphi(x)$.

Observațiunea II. In egalitatea (2) derivând de p ori găsim:

$$f^{(p)}(1)=\sum_{q=p}^{n+1} q(q-1)(q-2)\ldots(q-p+1)\,\alpha_q$$

$$\frac{1}{p!}f^{(p)}(1)=\sum_{q=p}^{n+1} C_q^p\,\alpha_q=\alpha_p+\sum_{q=p+1}^{n+1} C_q^p\,\alpha_q$$

C_i^p însemnând numărul combinărilor ce se pot face cu i obiecte luate câte p. Relațiunile (3) și (4) devin:

$$(5)\ f(1)=A_0 \qquad (6)\ \sum_{q=p+1}^{n+1} C_q^p\,\alpha_q=A_p\ (p=1,2,3..n)$$

Observațiunea III. Un alt metod mai lung, dar mai elementar de a găsi valoarea lui $f(x)$ e următorul: se dă lui x, $(n+1)$ valori distincte a_0, a_1, $a_2,\ldots a_m,\ldots a_n$ luate după voie, pentru care vor corespunde, din (1), ecuațiunile:

$$f(a_m+1)-f(a_m)=\varphi(a_m)\quad (m=0,\ 1,\ 3,\ldots\ n).$$

Se rezolvă ulterior sistemul sus obținut, pentru a afla valoarea necunoscutelor de forma α_p. Se stabilește astfel $f(x)$. Pentru ușurarea calculelor, vom lua întotdeauna pentru a_m, cele mai mici valori întregi posibile pozitive sau negative, utilizând și rădăcinele întregi ale funcțiunei $\varphi(x)$, dacă se cunosc.

2. Câteva exemple practice vor putea concretiza cele arătate anterior. Ne propunem de pildă, a calcula suma cuburilor primelor n numere cu ajutorul identității:

$$(7)\ \sum_{x=1}^{n}[f(x+1)-f(x)]\equiv f(n+1)-f(1)$$

Ne rămâne a află pe $f(x)$ așa încât să avem:

$$(8)\qquad f(x+1)-f(x)\equiv x^3\equiv\varphi(x).$$

De aci, rezultă:

$$n=3\quad f(x)=\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4.$$

Egalitățile (3) și (4) sau egalitățile (5) și (6) ne dau ecuațiunile:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0\\ 2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4&=0\\ 3\alpha_3+6\alpha^5&=0\\ 4\alpha_4&=1\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_4=\frac{1}{4},\quad \alpha_3=-\frac{2}{4},\quad \alpha_2=\frac{1}{4},\quad \alpha_1=0$$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2(1-2x+x^2)=\frac{x^2(x-1)^2}{4}$$

Inlocuind această valoare în (7) obținem:

$$\sum_{x=1}^{n} x^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(A se vedea pag. 100 parag. 5, an. II, în articolul menționat.). Aceiași sumă o putem căpăta, întrebuințând metodul schițat la osbervația III. In adevăr făcând în (8), $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2$ obținem sistemul:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4&=-1\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=0\\ \alpha_1+3\alpha_2+7\alpha_3+15\alpha_4&=1\\ \alpha_1+5\alpha_2+19\alpha_3+65\alpha_4&=8\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_4=\frac{1}{4},\quad \alpha_3=-\frac{2}{4},\quad \alpha_2=\frac{1}{4},\quad \alpha_1=0$$

$$f(x)=\frac{x^2(x-1)^2}{4}$$

Restul urmează ca în procedeul precedent.

Fie de aflat suma:

$$\sum_{n=1}^{n}(n^3-n^2+1)$$

(A se vedea „Culegerea-algebră“ de Ioachimescu pag. 89),

Avem deci de rezolvat identitatea:

$$f(x+1)-f(x)\equiv x^3-x^2+1=\varphi(x)$$

$$n=5\quad f(x)=\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_6 x^6$$

Relaţiile (5) şi (6) produc sistemul:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6 &= 1\\ 2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5+6\alpha_6 &= 0\\ 3\alpha_3+6\alpha_4+10\alpha_5+15\alpha_6 &= -1\\ 4\alpha_4+10\alpha_5+20\alpha_6 &= 0\\ 5\alpha_5+15\alpha_6 &= 0\\ 6\alpha_6 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

*** $\alpha_6=\frac{2}{12}$, $\alpha_5=-\frac{6}{12}$, $\alpha_4=\frac{5}{12}$

$$\alpha_3=-\frac{4}{12},\quad \alpha_2=\frac{5}{12},\quad \alpha_1=\frac{10}{12}$$

$$f(x)=\frac{2x^6-6x^5+5x^4-4x^3+5x^2+10x}{12}$$

Făcând în (7) aceste înlocuiri, găsim:

$$\sum_{x=1}^{n}(x^5-x^2+1)=$$

$$\frac{1}{12}n(2n^5+6n^4+5n^3-4n^2-7n+10).$$

Utilizând cel de al doilea procedeu, făcând în (8) $x=-2_1-1$, $0+1$, 2 se obţine un sistem de ecuaţiuni, din a cărei rezolvare căpătăm aceleaşi valori, ca mai sus. Rezultatul va fi identic.

Intr'unul din numerile viitoare ale revistei, voi reveni, studiind cazurile particulare pe care le poate lua $\varphi(x)$.

STOENESCU AL. I.
cl. VII R. lic. Cantemir-Vodă Buc.

RECREAŢIUNI MATEMATICE

Cum putem afla luna în care s'a născut o persoană şi vârsta ei (<100).

Spunem unei persoane: *Dublaţi numărul lunei în care v'aţi născut, adunaţi 5, înmulţiţi rezultatul cu 50 şi adunaţi vârsta ce aveţi; spuneţi-mi cât aţi găsit?*

Vom scădea din acest număr 250, vom despărţi rezultatul în două grupe, ultima grupă având două cifre; prima grupă dela stânga reprezintă numărul lunei în care s'a născut acea persoană şi a doua grupă reprezintă vârsta ei. Evident că toate aceste operaţiuni le vom face mintal şi vom da răspunsul imediat.

Exemplu: Fie Iunie luna în care s'a născut o persoană şi 17 ani vârsta ei.

Calculele făcute de acea persoană în urma îndicaţiilor noastre.

$$6\times 2+5=17$$

$$17\times 50+17=867.$$

Operaţiile noastre sunt

$$867-250=6.17,$$

6 este a câtea lună, adică Iunie, iar 17 este vârsta.

Explicaţie:

$$867=(6\times 2+5)\times 50+17=6\times 100+250+17$$

Scădem 250 din ambii membrii, avem:

$$617=6\times 100+17.$$

Numărul lunei (6), vedem că este câtul lui 617 prin 100, ceiace explică despărţirea unei grupe de 2 cifre la dreapta, această grupă reprezintă vârsta.

DIMA ST. ILIESCU
Lic. Militar Târgu-Mureş

Observare. Culegătorul şef al „R. M.“ d-l *I. Antonescu,* a observat că regula de mai sus se menţine şi în cazul când vârsta persoanei trece de 100 de ani (<200), având grija în acest caz să scădem 1 din prima grupă din stânga şi să'l punem înaintea grupei a doua.

Exemplu. Fie Martie luna în care s'a născut o persoană şi 123 vârsta ei.

Calculele făcute de acea persoană în urma indicaţiilor date sunt:

$$3\times 2+5=11$$

$$11\times 50+123=673.$$

Operaţiile noastre:

$$673-250=423.$$

Descompun pe 423 în două grupe 4 şi 23. Scot o unitate din prima grupă şi am 3, adică a treia lună sau Martie; aşez această unitate înaintea grupei a doua şi am 123, adică vârsta căutată.

Explicaţia ca în primul caz.

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică, anul XXVIII, No. 9, Mai 1923.

Rezultatul concursului «Gazetei Matematice» de G. Țițeica. Genaralizarea teoremei lui Fermat în cascadă de G. Zapan.

PROBLEME REZOLVATE

145. — *Să se rezolve ecuația*

$$x^4 + 3x + 1 = 2x^2(x + 1)$$

CAPITAN GR. ZAPAN

Soluție dată de d-nii: *Alexandrescu Mihai* (Constanța), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Brăileanu Al.* (Constanța), *Dima St. Iliescu* (lic. milit. Târgu-Mureș), *Dragomir N. Ion* (lic. Cantemir, București), *Goilav Cristea* (Tecuci), *Grofșorean I. G.* (lic. Arad), *Iordache N. Ion* (Curtea de Argeș), *Iscovici I. J.* (lic. Pitești), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Stănescu A. D-tru* (Galați), *Stoenescu I.* (lic. Cantemir, București), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Timotin D-tru* (Oradia-Mare) și *Mihăescn D. C-tin* (Giurgiu).

Ecuația dată se poate scrie:

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad x^2(x-1)^2 - 3x(x-1) + 1 = 0.$$

Avem astfel o ecuație de gradul al 2^{lea} în $x(x-1)$, care rezolvată ne dă:

$$x(x-1) = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad 2x^2 - 2x - 3 \mp \sqrt{5} = 0.$$

De aici deducem:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7 \pm 2\sqrt{5}}}{2}$$

Aici avem cele 4 rădăcini ale ecuației date.

Soluție dată de d-nii: *Antoniu S. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Coșereanu Ioan* (Timișoara), *Marinescu M. Ioan* (lic. M-rea Dealu).

Ecuația propusă se mai poate scrie:

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad (x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - x - 1) - 1 = 0,$$

de unde:

$$x^2 - x - 1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

sau.

$$2x^2 - 2x - 3 \pm \sqrt{5} = 0.$$

Rezultă,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7 \pm 2\sqrt{5}}}{2}$$

Soluție dată de d-nii: *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Bobârnac Mircea* (Timișoara), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Crăinicescu Eugen* (Timișoara), *Dobrescu-Băbici* (lic. Caracal), *Dospinoiu N.* (conductor de lucrări publice), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Harth Ernst* (Câmpulung. Bucovina), *Ionescu Ilie* (lic. Caracal), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Katz Pincu* (Galați), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Scodrano Alex.* (Durostor), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București) și *Vasilescu C. Virgil* (Ploești).

Scriind ecuația dată sub forma,

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0,$$

făcând substituția $x = y + h$ și ordonând în raport cu y, avem:

$$y^4 + (4h - 2)y^3 + (6h^2 - 6h - 2)y^2 +$$

$$(4h^3 - 6h^2 - 4h + 3)y +$$

$$h^4 - 2h^3 - 2h^2 + 3h + 1 = 0.$$

Observăm că pentru $h = \frac{1}{2}$, coeficientul lui y^3

se anulează și ecuația în y devine:

$$y^4 - \frac{7}{2}y^2 + \frac{29}{16} = 0$$

$$\text{sau} \quad 16y^4 - 56y^2 + 29 = 0.$$

Rezultă,

$$y = \pm \frac{\sqrt{7 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

și deci,

$$x = y + \frac{1}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

ne dă cele 4 rădăcini ale ecuației date.

Alte soluțiuni date de d-nii: *Bercovici Emil* (lic. Matei-Basarab, București), *Flichstein I.* (lic. Cernăuți), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu B. Ioan* (lic. Pitești) și *Scoruțeanu Eugen.*

Observare. D-l *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), observă că ecuația dată este un caz particular al ecuației mai generale

$$a x^4 - b x + c = x^2 (2 a x - a - b)$$

care se poate scrie:

$$a x^2 (x-1)^2 + b x (x-1) + c = 0$$

Această ecuație se rezolvă în $x(x-1)$ și apoi în x, ca în prima soluție.

146. — *Să se afle natura seriei.*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^3}$$

A TH. NICOLAU

Prima soluție dată de d-nii: *Bușilă A. Adrian, Crețoiu A.* (lic. Cantemir, București), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Lăzărescu Jean* (lic. Pitești), *Măru D-tru* (lic. Galați), *Miclescu Andrei* (Sc. de Artilerie), *Negretzu Florea* (Pitești), *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), *Popescu N. Ștefan* (lic. Pitești), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret), *Weissemberg Eugen* (lic. Galați) și *Witzman H. Marcu* (lic. Galați).

In matematicele superioare simbolul log. înseamnă logaritm *neperian* (adică având ca bază $e = 2.7182$).

Atunci,

$$\log n < n$$

și evident,

$$\frac{\log n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Vedem astfel că termenii seriei date sunt mai mici decât a-i seriei,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

care știm că este convergentă, deci seria dată este și ea convergentă.

Observare. D-nii: *Georgescu Er. Florian, Popovici Tiberiu* și *Ștefănescu Emil,* observă că seria dată este încă convergentă, când baza sistemului de logaritmi ar fi un număr pozitiv oarecare, demonstrația de mai sus menționându-se.

A doua soluție dată de d-nii: *Grümberg S. Herman* (Galați), *Iliescu I. Ion* (lic. Galați), *Haimovici Salo, Herscovici Em.* (lic. Galați), *Lehtemberg W. D.* (lic. Galați), *Mateescu Gh.* (lic. Galați), *Popeanu A. G.* (Constanța) și *Stoenescu C. Ion* (lic. Gatați).

Aplicăm criteriul logaritmic al lui *Cauchy*, adică cercetăm

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$$

u_n fiind termenul general al unei serii. In cazul nostru, E însemnând limita căutată, avem:

$$E = \lim_{n=\infty} \frac{\log \frac{n^3}{\log n}}{\log n} = \lim_{n=\infty} \frac{3 \log n - \log (\log n)}{\log n}$$

$$= 3 - \lim_{n=\infty} \frac{\log (\log n)}{\log n}$$

Scăzătorul fiind de forma $\frac{\infty}{\infty}$, teorema lui Hôpital ne dă

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(\log n)}{\log n} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{1}{n \log n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

şi atunci,

$$E = 3$$

Limita căutată fiind astfel > 1, seria dată este convergentă.

Alte soluţiuni date de d-nii: *Coşereanu Ion* (Timişoara), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu) şi *Rigani G.*

147. — *Să se studieze variaţiunea funcţiunei*:

$$y = \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 6 & x & 3+x \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

ION S. ANTONIU

Adunând elementelor primii linii, elementele celorlalte două linii şi observând că $x+5$ e factor comun, putem scrie:

$$y = (x+5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & x & 3+x \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Dezvoltând după regula lui *Sarrus* determinantul de al 3^{lea} ordin găsim:

$$y = (x+5)(x^2 - 5x - 3) = x^3 - 28x - 15$$

Vedem că pentru $x = -5$ şi $x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$, avem $y = 0$.

Ştim apoi că valorile care fac maximă sau minimă funcţiunea, sunt acelea care anulează derivata, şi cum derivata este,

$$y' = 3x^2 - 28,$$

ea se anulează pentru

$$x = -\sqrt{\frac{28}{3}} \text{ şi } x = \sqrt{\frac{28}{3}}$$

şi trece dela pozitiv la negativ pentru prima rădăcină şi dela negativ la pozitiv pentru a doua.

Rezultă că funcţiunea este maximă pentru

$$x = -\sqrt{\frac{28}{3}} \text{ şi minimă pentru } x = \sqrt{\frac{28}{3}}$$

$$\text{Max } y = -\frac{28}{3}\sqrt{\frac{28}{3}} + 28\sqrt{\frac{28}{3}} - 15 = \frac{56}{3}\sqrt{\frac{28}{3}} - 15$$

$$\text{Min. } y = \frac{28}{3}\sqrt{\frac{28}{3}} - 28\sqrt{\frac{28}{3}} - 15 = -\frac{56}{3}\sqrt{\frac{28}{3}} - 15$$

Luând $\sqrt{\frac{28}{3}} = 3.05$ cu aproximaţie de 0.01, avem,

$$\text{Max. } y = 41{,}93$$

$$\text{Min. } y = -71{,}93$$

Observăm încă că derivata a 2^a a funcţiunei,

$$y'' = 6x$$

se anuleaxă pentru $x = 0$, iar derivata a 3^a $y''' = 3$ fiind $\neq 0$ pentru $x = 0$, rezultă că $x = 0$ este un punct de inflexiune pentru curbă.

Pentru $x = 0$, $y = -15$.

Putem forma acum următorul tablou de variaţie

x	$-\infty$		-5		$-\sqrt{\frac{28}{3}}$		$\frac{5-\sqrt{37}}{2}$		0		$\sqrt{\frac{28}{3}}$		$\frac{5+\sqrt{37}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$+$	0		$-$		$-$	0	$+$		$+$			
y	$-\infty$	cresc.	0	cresc.	M	descr.	0	descr.	-15	descr.	m	cresc.	0	cresc.	$+\infty$

unde,

$$M = \frac{56}{3}\sqrt{\frac{28}{3}} - 15 = 41{,}93,$$

$$m = -\frac{56}{3}\sqrt{\frac{28}{3}} - 15 = -71{,}93$$

Lăsăm pe seama corespondenților noștri reprezentarea grafică a funcțiunei, care e ușor de efectuat după tabloul de variație.

Soluțiuni bune date de d-nii: *Amărăscu O. Gavril* (lic. Caracal), *Bobârnac Mircea* (Timișoara), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Călin I. Aureliu* (Șc. Militară de Geniu), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val* (Călărași), *Ionescu Ion* (lic. Pitești), *Ionescu I. Ilie* (lic. Caracal), *Iordache N. Ioan* (C.-de-Argeș), *Kasargian Anam* (lic. Cantrmir, București), *Lăzărescu Th. Jean* (lic. Pitești), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mihăescu D. C.* (lic. Giurgiu). *Negretzu Florea* (Pitești), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Scodreanu Alexandru* (Durostor) *Solacolu Traian* (lic. Spiru Haret, București), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Măcrineanu St.*

Alte soluțiuni date de d-nii: *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Barglazan N. A.* (Sibiu), *Bercovici Emil* (lic. Matei Basarab, București), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Beșliu C.* (Timișoara), *Brătescu H. Mihail* (R.-Vâlcea), *Ciolacu Miron* (lic. Caracal), *Coșereanu Ioan* (Timișoara), *Dobrescu-Băbici* (lic. Caracal), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Gaef George* (Silistra), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Grümberg S. Hermann* (Galați), *Herșcovici Emanoil* (Galați), *Ioniță M. Ioan* (Șc. de Artilerie), *Katz Pincu* (Galați), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (lic. Giurgiu), *Lichtemberg W. D.* (lic. Galați), *Mateescu G.* (lic. Galați), *Moroianu Ah.* (Constanța), *Popovici Gh.* (lic. Național, Iași), *Popovici Th. Ioan*, *Propst A. Jean* (T.-Severin), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rubinstein Martin* (lic. Galați), *Scorișoreanu Eugen* (București), *Scripcă C. Laur* (lic. Național, Iași), *Solomon I. Asnaș* (Călărași), *Stamatiu Mihai* (Pitești), *Stănciulescu A. Gh.* (lic. Pitești), *Stănescu O. D-tru* (Galați), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Teodorescu I. St.* (lic. Ploești), *Tuducescu A. Nicolae* și *Weiss Leon* (lic. Galați).

152. — *Să se demonstreze că în orice triunghiu există relația:*

$$\frac{1}{s} = \frac{\cot A}{h_a^2} + \frac{\cot B}{h_b^2} + \frac{\cot C}{h_c^2}$$

M. SARIAN

Prima soluție. Dacă în relațiunea cunoscută.

$$4s = a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C.$$

(Culegere de probleme, pag. 398, No. 28), înlocuim

$$a = \frac{2s}{h_a}, \quad b = \frac{2s}{h_b}, \quad c = \frac{2s}{h_c}$$

avem:

$$4s = \frac{4s^2 \cot A}{h_a^2} + \frac{4s^2 \cot B}{h_b^2} + \frac{4s^2 \cot C}{h_c^2}$$

Impărțind cu $4s^2$ ambii membri, găsim:

$$\frac{1}{s} = \frac{\cot A}{h_a^2} + \frac{\cot B}{h_b^2} + \frac{\cot C}{h_c^2}$$

Soluțiuni analoage date de d-nii: *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Berdan C-tin* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Bobârnac Mircea* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Brăileanu Al.* (lic. Constanța). *Brătescu H. Mihail* (R.-Vâlcea), *Bușilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Cerchez Lucy* (București). *Coșereanu Ioan* (Timișoara). *Dobrescu-Băbici* (lic. Caracal), *Georgescu Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Goilav Cristea* (Tecuci), *Iliescu Emilian*, *Ionescu I. Ilie* (lic. Caracal), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mircea Adam* (Constanța), *Popescu N. Ștefan* (Pitești), *Popovici Th. Ioan*, *Popovici Tiberiu* (Arad), *Ristea Marin* (lic. Caracal), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Șerbănescu M. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Schönfeld H. Conrad* (lic. Botoșani), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, *Vasiliu D. I.* (lic. Internat, Iași) și *Rigani C.* (Șc. Politechnică, București).

Observare. D-l *Iliescu Emilian* a observat că relațiunea

$$s = \frac{a^2 \cot A}{4} + \frac{b^2 \cot B}{4} + \frac{c^2 \cot C}{4}$$

care sub formă întreagă este relațiunea utilizată mai sus, scrie că suprafața triunghiului A B C este suma suprafețelor triunghiurilor B O C, A O C și A O B, O fiind centrul cercului circumscris

$$\frac{a \cot A}{2}, \quad \frac{b \cot B}{2}, \quad \frac{c \cot C}{2}$$

înălțimele acestor triunghiuri.

Soluția 2ª Dacă luăm relațiunea cuuoscută

$$\sum \frac{\cos A}{\sin B \sin C} = 2$$

(C. de P. pap. 395, No. 21), o dividem cu,

$$b c \sin A = 2s,$$

avem:

$$\sum \frac{\cos A}{b c \sin A \sin B \sin C} = \frac{1}{s}$$

Cum,

$$b \sin C = c \sin B = h_a,$$

deducem

$$\sum \frac{\cot A}{h_a^2} = \frac{1}{s}$$

tocmai relaţiunea cerută.

Soluţiuni analoage date de d-nii: *Berdan C-tin* (Bârlad), *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Georgescu C. Ioan* (Piteşti), *Lăzărescu Th. Ioan* (lic. Piteşti), *Popovici Th. Ioan*, *Stănciulescu A. Gh.* (lic. Piteşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani),

Soluţia 3ª In orice triunghiu avem relaţiile,

$$a = h_a (\cot B + \cot C),$$

şi

$$2s = a \cdot h_a$$

Multiplicând aceste relaţii, deducem uşăr

$$h_a^2 = \frac{2s}{\cot B + \cot C}$$

de unde.

$$\sum \frac{\cot A}{h_a^2} = \sum \frac{\cot A (\cot B + \cot C)}{2s} = \frac{1}{s} \sum \cot A \cot B$$

Cum însă,

$$\Sigma \cot A \cot B = 1$$

(C. de P. pag. 306, No. 31, în care se înlocueşte tangentele în funcţie de cotangente), rezultă:

$$\sum \frac{\cot A}{h_a^2} = \frac{1}{s}$$

Soluţiuni analoage date de d-nii: *Dan V.* (lic. Galaţi) *Dordea A. Traian*, *Grümberg S. Hermann* (lic. Galaţi), *Oprişeanu G. Ernest* (Bârlad).

Soluţia 4ª Relaţiunile cunoscute,

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}, \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\sin A = \frac{2s}{bc}, \quad h_a = \frac{2s}{a}$$

ne permite a scrie,

$$\frac{\cot A}{h_a^2} = \frac{a^2 (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$$

şi deci,

$$\frac{\cot A}{h_a^c} + \frac{\cot B}{h_2^b} + \frac{\cot C}{h_c^2} =$$

$$\frac{2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16 s^3}$$

Cum,

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) =$$

$$\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16} =$$

$$\frac{2a^2 b^2 + 2a^2 c^1 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}$$

rezultă,

$$\frac{\cot A}{h_a^2} + \frac{\cot B}{h_b^2} + \frac{\cos C}{h_c^2} = \frac{16 s^2}{16 s^3} = \frac{1}{s}$$

relaţiunea cerută.

Soluţiuni analoage date de d-nii: *Cocorandu M.* (lic. Braşov), *Dobrescu-Băbici* (lic. Caracal), *Dragomirescu-Buzne Eduard* (Şe. de Artilerie), *Herscovici Em.*, *Ionescu I. Ilie*, *Ionescu B. Ion* (lic. Piteşti), *Lăzărescu Jean* (lic. Piteşti), *Mateescu Gh.* (lic. Galaţi), *Pinchis M.* (lic. Galaţi), *Propst A. Jean* (lic. T.-Severin), *Solacolu Ştefan*, *Stamatiu Mihail* (Piteşti) şi *Weiss Leon* (lic. Galaţi).

Alte soluţiuni date de d-nii: *Bercovici A. Emil.* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Bobârnac Mircea*, *Brătescu H. Mihail*, *Buşilă A. Adrian*, *Cazacu V.*, *Constantinescu Ion*, *Cristescu Virgil*, *Dragomir N. Ion*, *Focşeneanu I. M.*, *I. N. Georgescu-Val*, *Iordache N. Ioan*, *Katz Pincu*, *Klein I.*, *Lăzărescu Fl. Ştefan*, *Mehlmann Theodor*, *Mocanu N. Aurel Negretzu Florea*, *Popovici Th. Ioan*, *Schileru C. Dili*, *Stoenescu Ioan*, *Sufleţel P. Aurel* şi *Theodoru Nicuţă*.

Observări. 1) D-l *Buşilă A. Adrian* stabileşte relaţia:

$$\sum \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}{r_a^2} = \frac{1}{s}$$

2) D-l *Georgescu Florian* stabileşte încă relaţiunile:

$$\sum \frac{\cot A}{h_a} = \frac{R + r}{s}, \quad \sum \frac{\cot A}{r_a h_a} = \frac{R + r}{p r^2},$$

$$\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)$$

3) D-l *Iliescu Emilian* stabileşte

$$\sum a^2 \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 4s \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

$$\sum \frac{\cos A}{h_a} = \frac{1}{R}$$

4) *Adam Mircea* stabileşte că,

$$\sum \frac{\cot A}{h_a} = \frac{R+r}{s}$$

5) D-l *Popovici Tiberiu* stabileşte că,

$$\sum \frac{\cot A}{a h_a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{8s^2}, \quad \sum r_a \cot \frac{A}{2} = 4R + r,$$

$$\sum \frac{\cot \frac{A}{2}}{h_a} = \frac{1}{2s^2} \sum a r_b r_c$$

şi altele analoage.

6) D-l *Şerbănescu M. Ioan* a stabilit că,

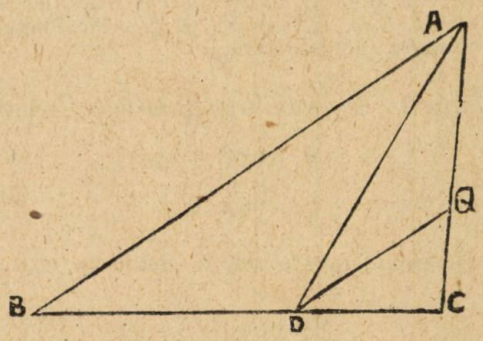
$$\sum \cot A = \sum \frac{s}{h_a^2}$$

159. — *Fie* A B C *un triunghiu oarecare şi* D *un punct pe baza* B C. *Paralela din* D *la* A B *tae* A C *în* Q. *Să se construiască punctul* D *astfel ca să avem:*

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{DQ}$$

ALEXANDRU NICULESCU

Prima soluţie dată de d-nii: *Bobârnac Mircea* (Timişoara), *Brăileanu Al.* (lic. Constanţa), *Cocorandu M.* (lic. Braşov), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Coşereanu Ion* (Timişoara), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Flickstein I.* (Cernăuţi), *Focşeneanu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Gabrielessu C. Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu C. Ioan* (lic. Piteşti), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Lăzărescu Th. Jean* (lic. Piteşti), *Mares Corneliu* (Bacău), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Nicolau M. Iulian, Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Pinchis M.* (lic. Galaţi), *Pârâianu Nicu* (Şc. Navală), *Popescu N. Ştefan* (Piteşti). *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Scodrano Alexandru* (Durostor), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solacolu M. Traian* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), şi *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mircea I. Adam* (Constanţa), *Rădulescu C. Stelian* şi *C. Rigani.*



Fie D punctul cerut şi D Q paralelă cu A B. Triunghiurile A B C şi Q D C sunt asemenea şi deci:

$$\frac{AB}{DQ} = \frac{BC}{DC} = \frac{BD+DC}{DC}$$

$$(1) \quad \frac{AB}{DQ} = 1 + \frac{BD}{DC}$$

Din relaţia dată deducem încă:

$$(2) \quad \frac{AB}{DQ} = 1 + \frac{AB}{AC}$$

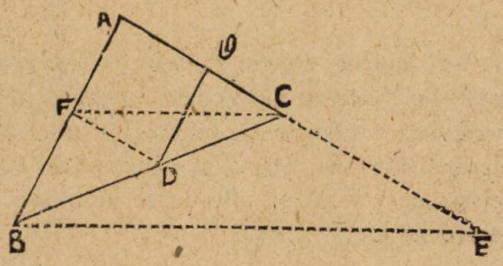
Primii membrii ai relaţiilor (1) şi (2) fiind egali, urmează că,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Vedem astfel că D împarte latura B C în părţi proporţionale cu laturile A B şi A C, ceiace înveder ează că el este piciorul bisectoarei unghiului A.

Soluţia 2ª dată de d-nii: *Berdan C-tin* (Bârlad), *Brăescu E.* (lic. Henri, Paris), *Cotaru Plutarc, Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Grünfeld M.* (Brăila), *Iordache M. Ion* (Curtea-de-Argeş), *Katz Pincu* (Galaţi), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung. Bucovina),

Miclescu Andrei (Şc. de Artilerie), *Negretzu Florea* (Piteşti), *Popescu Ovidiu* (Kişinău), *Rusescu C.*, *Stoenescu Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stoenescu I. Alexandru* (student, Bucureşti), *Ulman Octav* (Timişoara) şi *Vasilescu C. Virgil* (liceul Ploeşti).



Dacă notăm pentru prescurtare,

$$AB = c,\ AC = b,\ \text{şi}\ DQ = x,$$

relaţia dată devine:

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$$

de unde:

$$x = \frac{b \cdot c}{b + a}$$

Segmentul căutat x, este deci a patra proporţională între segmentele cunoscute, c, b şi $b + c$ şi se construeşte astfel. Prelungim pe AC cu $CE = c$, unim B cu E şi ducem din C o paralelă CF la BE. Din triunghiurile asemenea AFC şi ABE, deducem:

$$\frac{AF}{c} = \frac{b}{b + c}$$

sau

$$AF = \frac{bc}{b + c}$$

şi atunci $x = AF$.

Din F ducem apoi o paralelă la AC, care va tăia pe BC în punctul cerut D, fiindcă ducând DQ paralelă cu AB, avem: $DQ = AF = x$.

Alte soluţiuni date de d-nii: *Amărăssu O. Gavril* (lic. Caracal), *Bogdan P. Martinian* (lic. Caracal), *Dobrescu-Băbici, Georgescu T.* (Ploeşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie) *Gheorghiu Lucian* (lic Naţional, Iaşi), *Ionescu I. Ilie* (lic. Caracal), *Ionescu S. Longin, Nicolau Iulian, Ristea N. Marin* (lic. Caracal) şi *Schileru C. Dili.*

Observare. D-nii *Georgescu Er. Fiorian, Mareş Corneliu* şi *Popovici Tiberiu*, observă că dacă s'ar fi cerut punctul D astfel ca să avem,

$$\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{DQ}$$

atunci punctul D ar fi fost piciorul bisectoarei exterioare.

182. — *Să se arate că expresiunea:*

$$E = \cos^2 x + \sin^2 y \sin^2 x (\cot^2 x + \operatorname{cosec}^2 y) - \sin^2 y \cos^2 x$$

este independentă de x şi y.

EMIL ŞTEFANESCU

Au rectificat enunţul şi soluţionat chestiunei, d-nii: *Biernaschi C-tin* (Şc. de Artilerie), *Bobârnac C. Mircea* (Timişoara), *Cosereanu Ion* (Timişoara), *Dragomirescu-Buzne Eduard* (Şc. de Artilerie), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Grofşoreanu I. Gh.* (lic. Arad), *Ioniţă M.* (Şc. de Artilerie), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Miclescu Andrei* (Timişoara), *Septelici Raul, Sufletel Raul* (Şc. de Artilerie), *Brădeseanu C. Cornel* (lic. Spiru Haret), Bucureşti).

Putem scrie succesiv:

$$E = \cos^2 x + \sin^2 y \sin^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y}\right)$$

$$- \sin^2 y \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 y \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$- \sin^2 y \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Expresia dată este astfel independentă de x şi y.

Observare. E sigur că am fi avut foarte multe soluţiuni la această problemă, dacă în enunţ nu s'ar fi strecurat o eroare, punându-se $\cot^2 y$ în loc de $\operatorname{cosec}^2 y$ cum am scris mai sus.

PROBLEME PROPUSE

250. — Să se găsească un cub perfect de cinci cifre, astfel ca numărul format din ultimele două cifre să întreacă cu zece unități numărul format din primele două cifre și să fie în același timp pătratul cifrei a doua.

I. N. GEORGESCU-VAL

251. — In câte moduri putem plăti suma de 87 lei cu hârtie de 1 leu, 2 și 5 lei?

EMIL ȘTEFANECSU

252. — Să se construiască un triunghiu ABC, cunoscând centrul O al cercului circumscris, mijlocul uneia din laturi și mijlocul lui AH, H fiind ortocentrul triunghiului,

UDRISKY TRAIAN

253. — Se dau două cercuri O, O' tangente exterior într'un punct C. Fie P un punct pe tangenta comună trecând prin C; MM' și NN' tangentele comune exterioare la cercurile O, O'. Dreptele PM și PN taie cercul O în M_1 și N_1 iar dreptele PM' și PN' taie cercul O' în M'_1 și N'_1. Fie încă S centrul de asemănare direct al cercurilor O, O'. Să se demonstreze că cercurile $PM_1M'_1$, $PN_1N'_1$, $SN'N'_1$, $SM'M'_1$, SMM_1, SNN_1 sunt toate concurente într'un punct P', care la rândul lui se mișcă pe un cerc fix când P se mișcă pe tangenta PC.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

254. Să se transforme într'un produs suma:

$$z(x-1)(y-1)(y-x)+x(y-1)(z-1)(z-y)+$$
$$y(z-1)(x-1)(x-z)$$

M BOBARNAC

254. — Să se rezolve ecuațiunea:

$$x^4+5a(x^3+a^3)+10a^2x(x+a)=0.$$

MAIOR O. BUGEANU

255. — Seriile $\Sigma \arcsin u_n$ și Σu_n sunt convergente sau divergente în același timp. Se presupune că, u_n sunt pozitivi și inferiori lui unu, $\arcsin u_n$ cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$, iar $\lim_{n=\infty} u_n = 0$.

TH. ANGHELUTA

256. — n jucători convin ca acel ce câștigă să primească dela fiecare din ceilalți jucători atât cât are înainte de a câștiga. Ei joacă n partide și câștigă fiecare câte una. Știind că s'au retras fiecare cu aceiași sumă a, să se afle cu ce sume sau așezat fiecare la joc.

V. ALACI

257. — Să se arate că în orice triunghiu dreptunghic există relațiunile:

$$a+b+c=r+r_a+r_b+r_c$$

$$a^2+b^2+c^2=r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2$$

GRIGORE ZAPAN

258. — Să se demonstreze că într'un triunghiu ABC, avem:

$$\frac{a^2-b^2}{r_c+r}+\frac{b^2-c^2}{r_a+r}+\frac{c^2-a^2}{r_b+r}=0.$$

I. COSEREANU

259. — Un punct greu căzând pe verticală, parcurge înălțimea unui stâlp de telegraf paralel cu verticala sa de cădere și înalt de 10 m., în un sfert de secundă. Să se afle înălțimea dela care punctul a fost lăsat să cadă fără viteză.

V. VALCOVICI

Erată. In problema 225, în loc de: „produsul terminilor extremi 235" a se citi: produsul terminilor extremi 225".

INFORMATIUNI

La Școala Politechnică din Timișoara se găsesc vacante următoarele catedre:

1. Geometria analitică;
2. Mecanica;
3. Fizica;
4. Technologia;
5. Topografia;
6. Organe de mașini;
7. Electricitate și electrotechnică;
8. Geologie și paleontologie;
9. Mineralogie și petrografie;
10. Termodinamică;
11. Idraulică;
12. Mașini termice;
13. Măsuri electrice;
14. Mașini miniere;
15. Foraje;
16. Cazane, încălzit;
17. Metalurgie;
18. Geologie economică și zăcăminte;
19. Mașini electrice;
20. Centrale electrice, distribuția energiei;
21. Construcțiuni.

Potrivit art. 25 și 26 din decretul-lege privitor la înființarea și organizarea școlilor politechnice din România, publicat în „Monitorul Oficial", No. 61, din 19 Iunie 1920, d-nii candidați de a ocupa aceste catedre și care se găsesc în condițiunile prevăzute de acel decret-lege, vor adresa în termen de două luni dela data inserțiunii prezentei publicațiuni în „Monitorul Oficial", cererile lor, (adică până la 25 Iulie a. c.). Direcțiunii Școlii Politechnice din Timișoara, însoțite de un memoriu arătând titlurile, lucrările și activitatea științifică desfășurată pe baza cărora solicită catedra.

Anul I și II al R. M. T. se află broșat strângând în două volume cele 12 numere ce apar anual. Se pot procura colecțiile dela Administrație în schimbul costului. Totuși volumele din anul I fiind foarte puține, nu se vor putea vinde separat ci numai cu colecția întreagă: Astfel

Vol. I și Vol. II împreună 150

Vol. II separat 50

Banii se pot trimete prin mandat postal pe adresa d-lui Ing. C. Teodorescu, subdirectorul Școlii Politechnice.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 IULIE 1923 NO. 5

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 5 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. ERNEST ABASOHN. COORDONATE TANGENTIALE
2. NOTE MATEMATICE.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 183, 187. 201, 209. 218, 226.
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Şcoalei Politechnice din Timişoara

---

ANUL III. — No. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

COORDONATE TANGENȚIALE

APLICAȚIUNE

de ERNEST ABASOHN
Inginer. Licențiat în Matematici
Profesor la liceul Cantemir-Vodă

In No. 11, anul II-lea al acestei reviste, făcând o paralelă între coordonatele punctuale și cele tangențiale, — am arătat că se pot dà chiar în liceu noțiuni asupra acestor din urmă coordonate fără a face apel la alte cunoștinți decât acelea cuprinse în programul de geometrie analitică.

In cele ce urmează îmi propun să arăt că prezintarea simultană a acestor două feluri de coordonate, are pe lângă avantagiul unei expuneri mai complecte, *cu aceleași mijloace* și pe acela că deschide cu ușurință calea spre noi cercetări.

Exemplu care urmează, cred că va dovedi acest lucru.

Să considerăm proprietatea bine cunoscută: *„polurile dreptelor care trec prin focarul unei parabole sunt situate pe directoarea acesteia“* și să încercăm a aprofundà această proprietate la lumina coordonatelor tangențiale.

Totalitatea dreptelor care trec prin focarul unei parabole sunt de fapt totalitatea tangentelor care se pot duce la o curbă redusă la acest focar; această constatare sugerează ideia de a considera pe lângă focarul dela distanță finită și focarul dela infinit al aceleiași parabole, adică punctul dela infinit depe direcțiunea axei parabolei.

Totalitatea dreptelor care trec prin acest d'al doilea punct, sunt drepte paralele cu axa parabolei, adică diametrele ei; care este locul geometric al polurilor corespunzătoare acestor drepte?

Observând că polul unei drepte se obține duând tangentele la parabolă în punctul unde întâlnește parabola, iar cea d'a doua tangentă este chiar dreapta dela infinit a planului; rezultă că polul unui diametru se găsește la infinit.

Prin urmare, locul geometric al polurilor diametrelor este dreapta dela infinit; reamintind însă că cele două focare pot fi privite din *punct de vedere tangențial* ca o conică degenerată (vezi articolul citat) proprietatea considerată la începutul acestui articol apare ca un caz particular al unei probleme mai generale și anume: *„fiind dată o parabolă* P *și o conică oarecare* C, *care este locul polurilor unei drepte tangente la conica* C, *în raport cu parabola?“*

Vom rezolvà această problemă, geometricește în chipul următor: să cercetăm în câte puncte o dreaptă oarecare Δ taie *curba-loc* pe care o căutăm. Dacă un punct oarecare M descrie dreapta Δ, polara ei trece necontenit printr'un punct δ: polul lui Δ în raport cu parabola P.

Cum din δ putem duce în general două tangente la conica C — fie ele δT_1, δT_2, — urmează că în general există pe dreapta Δ două puncte M_1 și M_2, (polurile lui δT_1 și δT_2) ale căror polare în raport cu parabola sunt tangente conicei C.

Locul căutat este deci o conică; pentru a cunoaște *natura* conicei trebue să cercetăm cum se comportă ea față cu dreapta dela infinit. In acest scop, consider ca dreapta Δ, chiar dreapta dela infinit a planului și să refacem în acest caz, construcțiunile pentru aflarea punctelor M_1 și M_2, comune dreptei Δ și *conicei-loc;* punctul δ, polul lui Δ față de parabolă este chiar punctul dela infinit al acestei curbe; el se găsește în direcțiunea axei.

Din acest punct ducem tangente la conica C, adică ducem tangentele paralele cu axa parabolei; polurile acestor două drepte în raport cu parabola sunt — după cum am văzut punctele dela

infinit după tangentele la parabolă, în punctele unde δT_1 și δT_2 taie parabola,—după cum aceste puncte M_1 și M_2 sunt reale și distincte, imaginare sau confundate, locul căutat este o iperbolă, elipsă sau parabolă.

In cazul particular când conica C se reduce la focarele parabolei P, *conica-loc* se descompune și ea în două drepte: directoarea parabolei și dreapta dela infinit, cum am văzut mai sus.

Este interesant de cercetat câteva cazuri mai puțin particulare decât acela dela care am pornit precum și analizarea aceleași probleme în cazul general când în loc de parabola P am considerà o conică oarecare.

NOTE MATEMATICE

Asupra unei serii. — Intrebuințând criteriul lui *Cauchy*, așa cum s'a făcut la pag. 56, la rezolvarea problemei 146, se găsește că seria al cărei termen general este

$$u_n = \frac{\log n}{n^p}$$

este convergentă sau divergentă după cum $p > 1$ sau $p < 1$.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Reciproca problemei 159 publicată la pag. 60 este adevărată și se demonstrează foarte ușor chiar pe figura făcută acolo. Dacă D este piciorul bisectoarei AD atunci avem

$$DC = \frac{ab}{b+c}$$

apoi triunghiurile ABC și QDC dau

$$\frac{1}{DQ} = \frac{a}{c.DC} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b+c}{ab} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$$

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Generalizarea problemei 159. — Dacă l, m, n sunt niște cantități date atunci se poate cere punctul D pentru care avem

$$\frac{1}{l.AB} + \frac{1}{m.AC} = \frac{1}{p.DQ}$$

Urmând cuvânt cu cuvânt demonstrația dela prima soluție dată la pagina 60, se găsește că D împarte latura BC în două segmente pentru care avem

$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n} \cdot \frac{AB}{AC} + \frac{m-l}{l}$$

Insemnând DQ cu x, calea dela soluția a doua dă

$$x = \frac{lm}{n} \cdot \frac{bc}{mb+bc}$$

LOCOT. COL. GH BUICLIU

Suma derivatelor unui polinom în x.

Fie,

$$f(x) \equiv \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2} x^2 + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

Vom avea succesiv:

$$f'(x) = A_n^1 \alpha_0 x^{n-1} + A_{n-1}^1 \alpha_1 x^{n-2} + A_{n-2}^1 \alpha_2 x^{n-3} + \ldots + A_1^1 \alpha_{n-1}$$

$$f''(x) = A_n^2 \alpha_0 x^{n-2} + A_{n-1}^2 \alpha_1 x^{n-3} + A_{n-2}^2 \alpha_2 x^{n-4} + \ldots + A_2^2 \alpha_{n-2}$$

$$f'''(x) = A_n^3 \alpha_0 x^{n-3} + A_{n-1}^3 \alpha_1 x^{n-4} + A_{n-2}^3 \alpha_2 x^{n-5} + \ldots + A_3^3 \alpha_{n-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = A_n^n \alpha_0$$

(simbolul A_p^q reprezintă numărul aranjamentelor ce se pot face cu p obiecte luate câte q).

Adunând egalitățile de mai sus, membru cu membru și grupând termenii după puterile descrescătoare ale lui x obținem:

$$(1) \quad f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \ldots + f^{(n)}(x) \equiv A_n^1 \alpha_0 x^{n-1} + (A_{n-1}^1 \alpha_1 + A_n^2 \alpha_0) x^{n-2} + (A_{n-2}^1 \alpha_2 + A_{n-1}^2 \alpha_1 + A_n^3 \alpha_0) x^{n-3} + \ldots + (A_1^1 \alpha_{n-1} + A_2^2 \alpha_{n-2} + A_3^3 \alpha_{n-3} + \ldots + A_n^n \alpha_0)$$

Aplicație. Să se găsească un polinom așà încât suma derivatelor sale să fie egală cu:

$$(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Făcând în (1) $n = 4$, rezultă:

$$4\alpha_0 x^3 + (3\alpha_1 + 12\alpha_0) x^2 + (2\alpha_2 + 6\alpha_1 + 24\alpha_0) x + (\alpha_3 + 2\alpha_2 + 6\alpha_1 + 24\alpha_0) \equiv x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

De unde, prin identificare, obținem:

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2}, \quad \alpha_3 = -2,$$

Deci;

$$f(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 - 2x + k \quad (k, \text{ constant}).$$

STOENESCU AL. ION
cl. VII R. lic. „Cantemir-Vodă" Buc.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examenul de Geometrie Analitica anul I.

(2 Iulie 1923)

LUCRARE SCRISĂ

Fie O D, O E doi diametri conjugați ai unei elipse și P un punct fix în planul elipsei. Perpendiculara dusă din P pe O D întâlnește pe O E în M. Se cere:

1. — Locul punctului M.

2. — Locul precedent este o curbă F. Să se arate că dreptele care unesc pe P cu punctele de intersecție ale elipsei cu F sunt normale la elipsă.

3. — Se consideră toate conicele care trec prin intersecțiile elipsei cu curba F. Să se găsească locul geometric al centrelor acestor conice.

II

Se dă suprafața:

$$2y^2 - x^2 - xz - ay = 0$$

și se cere ecuația planului diametral conjugat direcției (1, 2, 3) și a diametrului conjugat direcției de planuri (1, 2, 3).

Timpul acordat dela ora 2 la $4^1/_2$.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociației de matematici pure și aplicate, Anu al II-lea, No. 9, Mai 1923. Les séries trigonométriques de *Tr. Lalescu.* Asupra unui complex patratic de *M. Ghermănescu.*

Gazeta Matematică, anul XXVIII, No. 10, Iunie 1923. Asupra unei clase de ecuații algebrice cu toate rădăcinele reale, de *Th. Angheluță.* O problemă cu indicatori de Căpitan *I. Linteș.*

PROBLEME REZOLVATE

183. — *Să se rezolve ecuația:*

$$x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+4a-6)x - 3(a^2-2a) = 0$$

M. VASILIU

Prima soluție dată de d-nii: *Berdan C.* (Tutova), *Biernaschy C-tin* (Șc. de Artilerie), *Boju Șt. Rosetel* (Durostor), *Dobrescu-Băbici, I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Ghițescu Virgiliu* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Iordache N. I.* (București), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București). *Rosca H.* (Cluj), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Urzică A.*

Ecuația dată se poate scrie succesiv:

$$x^3 - a x^2 - x^2 + a^2 x + 4ax - 6x - 3a^2 + 6a =$$

$$x^3 - a x^2 - x^2 + 3ax - 6x - a x^2 + a^2 x +$$

$$ax - 3a^2 + 6a = x[x^2 - (a+1)x + 3(a-2)] -$$

$$a[x^2 - (a+1)x + 3(a-2)] =$$

$$[x^2 - (a+1)x + 3(a-2)](x-a) =$$

$$[x^2 - (a-2)x - 3x + 3(a-2)](x-a) =$$

$$[x(x-a+2) - 3(x-a+2)](x-a) =$$

$$(x-a+2)(x-3)(x-a) = 0$$

Rădăcinele ecuației date, se obțin anulând fiecare din factorii în care ea s'a descompus, de unde deducem:

$$x_1 = a-2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = a.$$

Soluția 2ª dată de d-nii: *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Biernaschy C-tin* (Șc. de Artilerie), *Bogdan M.* (lic Caracal), *Brătescu H. Mihail* (R.-Vâlcea), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Gabrielescu C. Vasile* (Brăila), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Hutanu C-tin* (Conductor de Lucrări Publice), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. M.* (Pitești), *Iscovici J.* (lic. Pitești), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Lăzărescu Th. Jean* (lic. Pitești), *Lupșe Emil* (Șc. medie technică, Cluj), *Macri Socrate* (lic. Botoșani), *Marinescu I. Aristide* (lic. Caracal), *Mihăilescu D. C-tin* (Giurgiu), *Nicolau Gh. C-tin* (R.-Sărat), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Popescu Gh. Aurel* (lic. Matei Basarab, București), *Solacolu Mircea* (lic. Spiru Haret, București), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Weiss Leon* (lic. Galați), *Ciută Gavril* (Șc. Politechnică, Timișoara) și *Georgescu Florian* (lic. Cantemir, București).

Dacă cumva ecuația dată are rădăcinl de formă întreagă, ele se găsesc printre divizorii ultimului factor care sunt:

$$\pm 3,\ \pm a,\ \pm (a-2).$$

Observând că pentru $x=3$ primul membru al ecuației se anulează, urmează că,

$$x=3$$

este o rădăcină,

Pentru $x=a$, primul membru al ecuației încă se anulează, deci și.

$$x=a$$

este o rădăcină.

Produsul rădăcinelor fiind, $3a(a-2)$, și produsul celor două rădăcini găsite fiind $3a$, urmează că

$$x=a-2$$

este încă o rădacină.

Rădăcinele ecuației date sunt atunci 3, a și $a-2$.

187. — *Să se verifice identitatea:*

$$(a-x)^n+x(a-x)^{n-1}+ax(a-x)^{n-2}+$$
$$a^2x(a-x)^{n-3}+\ldots+a^{n-1}x=a^n$$

I. DUMITRIU-ARAD

Soluție dată de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Berdan C-tin* (Văleni-Tutova) *Cocorandu Mircea* (lic. Brașov), *Dobrescu-Băbici, Grofșoreanu I. Gh.* (lic. Arad), *Mateescu G.* (lic. Galați). și *Septelici Raul* (Șc. de Artilerie).

Primii doi termeni adunați ne dau:

$$(a-x)^n+x(a-x)^{n-1}=$$
$$(a-x)^{n-1}(a-x+x)=a(a-x)^{n-1}$$

Rezultatul adunat cu al treilea termen ne dă, $a^2(a-x)^{n-2}$; apoi adunând rând pe rând termenii care urmează până la ultimul, obținem succesiv:

$$a^3(a-x)^{n-3},\ a^4(a-x)^{n-4},\ldots(a-x)a^{n-1},\ a^n$$

și astfel identitatea este obținută.

Soluție dată de d-nii: *Măru Dumitru* (lic. Galați) și *Pitea I. D-tru* (Șc. Politechnică, Timișoara).

Intrebuințăm metoda inducțiunei complecte, adică admitem că identitatea este adevărată pentru n și dovedim că e adevărată și pentru $n+1$.

Pentru aceasta multiplicăm cu $a-x$, ambii membri ai identității date presupusă adevărată, avem:

$$(a-x)^{n+1}+x(a-x)^n+axa(a-x)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a^{n-2}x(a-x)^2+a^{n-1}x(a-x)=a^n(a-x)$$

Trecând în primul membru termenul $-a^nx$ din membrul al doilea găsim:

$$(a-x)^{n+1}+x(a-x)^n+axa(a-x)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a^{n-1}x(a-x)+a^nx=a^{n+1}$$

și identitatea este astfel adevărată și pentru $n+1$.

Cum pentru $n=1$, ea se verifică ușor, fiindcă:

$$(a-x)+x=a,$$

rezultă că identitatea e adevărată și pentru $n=2, 3,\ldots$ și deci n.

Soluție dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *Schileru C. Dili* și *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani).

Dacă în identitatea cunoscută:

$$y^n-a^n=(y-a)(y^{n-1}+$$
$$ay^{n-2}+a^2y^{n-3}+\ldots+a^{n-1}),$$

punem, $y = a - x$, avem:

$$(a-x)^n - a^n = -x(a-x)^{n-1} - ax(a-x)^{n-2} - a^2x(a-x)^{n-3} - \ldots - a^{n-1}x.$$

$$(a-x)^n + x(a-x)^{n-1} + ax(a-x)^{n-2} + a^2x(a-x)^{n-3} + \ldots + a^{n-1}x = a^n$$

tocmai identitatea dată:

Soluție dată de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Bobârnac Mircea* (Timișoara), *Botiș Virgil* (lic. Arad), *Cretoiu A.* (lic. Cantemir, București), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Golcea Cornel* (lic. Deva), *Grünfeld Maximilian* (lic. Brăila), *Orbonas Iuliu* (Deva), *Percea Viorel* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Silion Gh.* (lic. Câmpina), *Solacolu Mircea* (lic. Spiru-Haret, București), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei-Basarab, București), *Solomon Vilhelm* (lic. Matei-Basarab, București), *Stamatiu Mihail*, *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București) și *Urzică Aurel* (lic. Deva).

Termenii din primul membru al identității, începând dela al doilea formează o progresie geometrică cu rația $\frac{a}{a-x}$, astfel că avem:

$$(a-x)^n + x(a-x)^{n-1} + ax(a-x)^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x = (a-x)^n + \frac{a^{n-1}x \cdot \frac{a}{a-x} - x(a-x)^{n-1}}{\frac{a}{a-x} - 1} =$$

$$(a-x)^n + a^n - (a-x)^n = a^n$$

Avem astfel identitatea cerută.

Soluție dată de d-nii: *Atanasiu D-tru*, *Georgescu Er. Florian* (liceul Cantemir. București), *Katz Pincu* (Galați), *Măcrineanu Sterian* (Galați), *Solomon N.* (Timișoara) și *Weiss Leon* (Galați).

Dezvoltând fiecare paranteză avem:

$$(a-x)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 - C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots \mp C_n^{n-1} a x^{n-1} \pm x^n$$

$$x(a-x)^{n-1} = a^{n-1}x - C_{n-1}^1 a^{n-2}x^2 + C_{n-1}^2 a^{n-3}x^3 - \ldots \pm C_{n-1}^{n-2} a x^{n-1} \mp x^n$$

$$ax(a-x)^{n-2} = a^{n-1}x - C_{n-2}^1 a^{n-2}x^2 + C_{n-2}^2 a^{n-3}x^3 - \ldots \pm a x^{n-1}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a^{n-2}x(a-x) = a^{n-1}x - C_1^1 a^{n-2}x^2$$

$$a^{n-1}x = a^{n-1}x$$

Adunând pe coloane și observând că în virtutea identității.

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-1} + C_{m-}^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}$$

toți coeficienții puterilor lui x sunt nuli, găsim:

$$(a-x)^n + x(a-x)^{n-1} + ax(a-x)^{n-3} + a^2x(a-x)^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x(a-x) + a^{n-1}x = a^n$$

192. — *Să se arate că în orice triunghiu există relațiunea*

$$\frac{p^2}{r} = \frac{(p-a)^2}{r_a} + \frac{(p-b)^2}{r_b} + \frac{(p-c)^2}{r_c} + 12R$$

notațiunea fiind cea obicinuită.

CAPITAN GR. ZAPAN

Dacă în identitatea cunoscută,

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

punem:

$$x = p - a, \quad y = p - b, \quad z = p - c$$

avem :

$$(1)\quad p^3=(p-a)^3+(p-b)^3+(p-c)^3+3abc$$

Ţinând seamă de egalităţile :

$$s=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=\frac{abc}{4R}$$

relaţia (1) divizată cu s, devine :

$$\frac{p^2}{r}=\frac{(p-a)^2}{r_a}+\frac{(p-b)^2}{r_b}+\frac{(p-c)^2}{r_c}+12R,$$

care este identitatea cerută.

Soluţiuni analoage date de d-nii : *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Cocorandu Mircea* (Braşov), *Cristea Gh. Aurel* (lic. Focşani), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Dordea A. Traian*, *Georgescu P. C.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Goldemberg I., Grofşorean I. Gh.* (lic. Arad), *Grünberg S. H.* (lic. Galaţi), *Grünfeld Maximilian* (lic. Brăila), *Haimovici C. Salo* (lic. Calaţi), *Herscovici Em.* (Galaţi), *Ionescu B. Ioan* (lic. Piteşti), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Ioniţă M. Ion* (Şc. de Artilerie), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Lăzărescu Fl. Şt.* (lic. Giurgiu), *Marinescu M. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Popea Ovidiu* (Chişinău), *Popovici I. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Scodrano Alexandru*, *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Ştefănescu Emil* (lic Spiru-Haret, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Ţiriac Ştefan* (lic. Arad), *Weiss Leon* (Galaţi), *Georgescu Er Florian* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara) şi *Răuţ C-tin* (lic. M-rea Dealu).

Soluţie dată de d-nii : *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal), *Ioniţă M. Ion* (Şc. de Artilerie), *Iordache N. Ioan* (student, Bucureşti), *Mehlmann Teodor* (Câmpulung, Bucovina) şi *Popovici Th.*

Ridicând la cub identitatea cunoscută.

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

avem :

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}+3\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)$$

Ţinând seamă că :

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{h_c},\quad \frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a},\quad \frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}=\frac{2}{h_b}$$

obţinem :

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}+\frac{24}{h_a h_b h_c}$$

Multiplicând ambii membri cu

$$s^2=p^2r^2=(p-a)^2r_a^2=(p-b)^2r_b=(p-c)^2r_c^2$$

avem :

$$\frac{p^2}{r}=\frac{(p-a)^2}{r_a}+\frac{(p-b)^2}{r_b}+\frac{(p-c)^2}{r_c}+4R,$$

fiindcă,

$$\frac{24s^2}{h_a h_b h_c}=\frac{24s^2}{\frac{2s}{a}\cdot\frac{2s}{b}\cdot\frac{2s}{c}}=\frac{3abc}{s}=4R$$

Alte soluţiuni date de d-nii : *Bobârnac Mircea* (Timişoara), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Popea Ovidiu* (Chişinău) şi *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

201. — *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} x^2y+y^2x=\alpha-\dfrac{1}{\alpha} \\ x^3+y^3=\dfrac{1}{\alpha^3}-\alpha^3 \end{cases}$$

TH. ANGHELUTA

Soluţie dată de d-nii : *Cocorandu Mircea* (lic. Braşov), *Georgescu Er. Florian* lic. Cantemir, Bucureşti), şi *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina).

Sistemul dat se poate scrie :

$$(1)\quad \begin{cases} xy(x+y)=\alpha-\dfrac{1}{\alpha} \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=\dfrac{1}{\alpha^3}-\alpha^3 \end{cases}$$

Ecuaţia doua în virtutea primei ecuaţii devine :

$$(x+y)^3=\frac{1}{\alpha^3}-\alpha^3+3\alpha-\frac{3}{\alpha}=\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha^3\right)$$

$$\left(\frac{x+y}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}\right)^2-1=0$$

$$\left(\frac{x+y}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}\right)\left[\left(\frac{x+y}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}\right)^2+\frac{x-y}{\frac{1}{\alpha}+\alpha}+1\right]=0$$

De aici deducem:

$\frac{x+y}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}-1=0$, și deci: (2) $x+y=\frac{1}{\alpha}-\alpha$

sau:

$$\left(\frac{x+y}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}\right)^2+\frac{x+y}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}+1=0,$$

de unde:

$$\frac{x+y}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}=\frac{-1\pm i\sqrt{1}}{2}, \quad \text{și deci:}$$

(3) $$x+y=\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\left(\frac{-1\pm i\sqrt{1}}{2}\right)$$

Prima ecuație din (1) în virtutea lui (2) și (3), devine:

$$xy=-1 \quad \text{și} \quad xy=\frac{2}{1\mp i\sqrt{3}}$$

Sistemul dat este echivalent cu sistemele:

(4) $$\begin{cases} x+y=\frac{1}{\alpha}-\alpha \\ xy=-1 \end{cases} \quad \text{și}$$

(5) $$\begin{cases} x+y=\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right) \\ xy=\frac{2}{1\mp i\sqrt{3}} \end{cases}$$

Valorile lui x și y din aceste sisteme, sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor de gradul al doilea:

(6) $$z^2-\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)z-1=0$$

(7) $$z^2-\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\left(\frac{-1\pm i\sqrt{2}}{2}\right)z+\frac{2}{1\mp i\sqrt{3}}=0.$$

Din (6) deducem:

$$z=\frac{\frac{1}{\alpha}-\alpha\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-2+\alpha^2+4}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}-\alpha\pm\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)\right]$$

deci:

(8) $$\begin{cases} x=\frac{1}{\alpha} \\ y=-\alpha \end{cases} \quad \text{sau,} \quad (9) \quad \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Din (7) deducem:

$$(1\mp i\sqrt{3})z^2-\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\left(1\pm i\sqrt{3}\right)z+2=0$$

$$(1\pm i\sqrt{3})^2z^2+2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)(1\pm i\sqrt{3})z-4=0$$

care rezolvată în raport cu $(1\pm i\sqrt{3})z$, ne dă:

$$(1\pm i\sqrt{3})z=\alpha-\frac{1}{\alpha}\pm\sqrt{\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+4}$$

$$z=\frac{\alpha-\frac{1}{\alpha}\pm\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)}{1\pm i\sqrt{3}}$$

și deci:

$$z_1=\frac{2\alpha}{1\pm i\sqrt{3}}, \quad z_2=\frac{-2}{\alpha(1\pm i\sqrt{3})}$$

Rezultă atunci pentru x și y încă sistemele de soluții:

(10) $$\begin{cases} x=\frac{2\alpha}{1+i\sqrt{3}} \\ y=\frac{-2}{\alpha(1+i\sqrt{3})} \end{cases} \quad (11) \quad \begin{cases} x=\frac{-2}{\alpha(1+i\sqrt{3})} \\ y=\frac{2\alpha}{1+i\sqrt{3}} \end{cases}$$

(12) $$\begin{cases} x=\frac{2\alpha}{1-i\sqrt{3}} \\ y=\frac{-2}{\alpha(1-i\sqrt{3})} \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} x=\frac{-2}{\alpha(1-i\sqrt{3})} \\ y=\frac{2\alpha}{1-i\sqrt{3}} \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii dat este astfel satisfăcut de sistemele de soluţii: (8), (9), (10), (11), (12) şi (13).

Au găsit numai sistemul (8) sau (8) şi (9), d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Apăteanu Camil* (Arad), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bercovici Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Berdan C.* (Bârlad), *Bernardis N. Berardo* (lic. R.-Sărat), *Bobârnac Mircea* (Timişoara), *Botez St. Mihail*, *Botiş E. Virgil* (lic. Arad), *Brătescu H. Mihail* (R.-Vâlcea), *Coşereanu Ion* (Timişoara). *Cristea Gh. Aurel* (lic. Focşani), *David Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Dobrescu-Băbici, Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Dvoirin L.* (lic. Galaţi), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Goldenberg I.* (Galaţi), *Grofşorean I. Gh.* (lic. Arad), *Grünberg Hermann* (Galaţi), *Grünfeld Maximilian* (lic. Brăila), *Haimovici C. Salo* (lic. Galaţi), *Haldner Marco* (Galaţi), *Herscovici Em.* (lic. Galaţi), *Ionescu I. Bresuică* (lic. Caracal), *Ionescu B. Ioan* (lic. Piteşti), *Iscovici I. J.* (lic. Piteşti), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Marinescu M. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Măcrineanu Sterian* (Galaţi), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Oprişeanu Ernest Orbonaş Iuliu* (lic. Deva), *Pătroianu Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Petrulicu Nicu* (lic. Ploeşti), *Popea G. Ovidiu* (Chişinău), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu P. Ştelian* (lic. Giurgiu), *Rigani Cr.* (Şc. Politechnică, Bucureşti), *Rubinstein Martin* (lic. Galaţi), *Scodrano Alex* (Durostor), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi). *Segall Lipa* (lic. Naţional, Iaşi), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solomon N.* (Timişoara), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Urzică Aurel* (lic. Deva), şi *Weisemberg Eugen* (lic. Galaţi), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Popeanu A.* (Constanţa), *Septelici Raul* (Şc. de Artilerie), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

209. — *Să se verifice identitatea:*

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)=-$$

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$$

MAIOR O. BUGEANU.

Dezoltând membrul al doilea şi făcând reduceri avem succesiv:

$$-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+$$

$$ab+bc+ac)=(b^2+ac-ab-bc)(c-a)(a^2+b^2+$$

$$c^2+ab+bc+ac)=(b^2c+ac^2-bc^2-ab^2-a^2c+$$

$$a^2b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)=$$

$$a^4b-a^4c+b^4c-b^4a+c^4a-c^4b=$$

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b),$$

şi avem astfel identitatea cerută.

Soluţiuni analoage date de d-nii: *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Apăteanu Camil* (Arad), *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bamdrabur C-tin* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Barbu A.* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Basta George* lic. militar, Tg.-Mureş), *Bârglăzan H.*, *Beldie N. D-tru*, *Berdan C.* (Bârlad), *Bocancea I. Kirilă* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Cândea Ion* (lic. Sibiu), *Cârstocea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Cojan T. C-tin* (lic. militar Tg.-Mureş). *Coşereanu Ion* (Timişoara), *Costăchescu Gh.* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Cretoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Cristea Gh. Aurel* (lic. Focşani), *David Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Diaconeasa Florian* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Dimitoiu Mihai* (lic. M-rea Dealu), *Dospinoiu N.* (cond. de Lucrări Publice), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Erder Ioseph* (lic. Galaţi), *Făcăoaru G.* (Bacău), *Gheorghiu G. Olimpia, German Coriolan* (Timişoara), *Georgescu Grigore* (lic. militar, Tg.-Mureş). *Ghidalisohn I.* (lic. Galaţi), *Golcea Cornel* (Deva), *Goldenberg I.* (lic. Galaţi), *Gorciu G. V.* (lic. Lazăr Bucureşti), *Grigorescu Pompiliu* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Grofşorean I. G.* (lic. Arad), *Grünberg S. Hermann* (Galaţi), *Haimovici Salo* (lic. Galaţi), *Haldner Marco* (Galaţi), *Herşcovici Em.* (Galaţi), *Hristhodor P. Nicolau* (Ploeşti), *Iliescu Şt. Dima* (lic. Tg.-Mureş), *Iliescu St. Virgil* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ionescu Gh. C-tin* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Ionescu V. Gh.* (lic. Galaţi), *Ionescu N.* (Timişoara), *Ioraache N. Ioan* (C.-de-Argeş), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Lăzărescu Şt.* (Giurgiu), *Lichtenberg W. D.* (lic Galaţi), *Lindenberg Lyonell* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Longinescu A. N.* (Caracal), *Macri Socrate* (lic. Botoşani), *Manoilescu C. C-tin* (Bucureşti), *Mateescu Gh.* (lic. Galaţi), *Măcrineanu Sterian* (Galaţi), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mitescu D-tru* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Munteanu Gh.* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Negretzu Florea* (lic. Piteşti), *Negroiu Pascu* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Nicolescu Angelo* (lic. Militar, Tg.-Mureş), *Nicolescu P. Vasile* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Oprişeanu Ernest*, *Oniţiu Florin* (lic. Braşov), *Pantazi Gh. D-tru* (lic. Brăila), *Percea Viorel* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Popea Gh, O.* (lic. Chişinău), *Popescu A.* (Galaţi), *Popescu Ep.* (lic. Galaţi), *Popescu I. Grigore* (Giurgiu), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Chr. Ion* (lic. Galaţi), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popoviciu Mircea* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Popovici I. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Postale Mihai* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Racoviţă D-tru* (lic. militar, Tg.-Mureş). *Radvan Florin* (lic. Galaţi), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Râmniceanu S. Radu* (Tg.-Jiu), *Rigani Cr.* (Bucureşti), *Rothenberg Moses* (lic. Naţional. Iaşi), *Rubinstein Martin* (lic. Galaţi), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Singer Ilie* (lic. Câmpina), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Solomon Nicu* (Timişoara), *Stambuleanu Adrian* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stavilă Teodor* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Stănescu Panait* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stănescu A. Nicolae* (lic. Craiova), *Stoenescu Gh.* (lic. militar, T.g-Mureş), *Stoenescu C. Ion* (lic. Galaţi), *Teodorescu P. Anton* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Teodorescu Fl.* (liceul militar, Tg -Mureş), *Tonea Nicolae* (lic. militar Tg.-Mureş), *Tiriac Ştefan* (lic. Arad), *Ţinta Elena* (Giurgiu), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Ursescu C. Gh.* (lic. Galaţi), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vernescu Ernest* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Vulpescu I. Ion* (lic. militar, Tg.-Mureş), *Weiss Leon* (lic. Galaţi), *Weiss L. Solomon* (Galaţi), *Weisemberg Eugen* (lic. Galaţi), *Branover L.* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara) şi *Witzmann H. Marcu* (lic. Galaţi).

Soluție dată de d-nii: *Adam Mircea* (lic. Constanța), *Bobârnac C. Mircea* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mirescu O. Petre* (lic. Gh. Lazăr, București), *Musta Șt.* (Timișoara), *Scodrano Alexandru* (Durostor), *Septelici Raul* (Șc. de Artilerie), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie) și *Urzică A.* (lic. Deva).

Folosim determinantul,

$$D = \begin{vmatrix} a^4 & b^4 & c^4 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

pe care îl dezvoltăm în două moduri diferite și egalăm rezultatele [1])

Determinantul dezvoltat după prima linie dă:

$$(1)\quad D = a^4\begin{vmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - b^4\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + c^4\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$$

Tot determinantul dat se mai poate scrie:

$$(2)\quad D = \begin{vmatrix} a^4-b^4 & b^4-c^4 & c^4 \\ a-b & b^4-c^4 & c^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^4-b^4 & b^4-c^4 \\ a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a^3+a^2b+ab^2+b^3 & b^3+b^2c+bc^2+c^3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)[a^3-c^3+b(a^2-c^2)+b^2(a-c)] =$$

$$-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$$

Egalând ultimii membri din (1) și (2), găsim identitatea dată.

Soluție dată de d-l *Negretzu Florea* (lic. Pitești). Înlocuim pe a cu x, trecem totul în primul membru și considerăm ecuațiunea de gradul al 4-lea:

$$f(x) = x^4(b-c) + b^4(c-x) + c^4(x-b) + (x-b)(b-c)(c-x)(x^2+b^2+c^2+bx+bc+cx) = 0.$$

Observăm că:

$$f(0) = b^4c - c^4b - bc(b-c)(b^2+c^2+bc) = 0$$

$$f(b) = b^4(b-c) + b^4(c-b) = 0$$

$$f(c) = c^4(b-c) + c^4(c-b) = 0$$

$$f(-b) = b^4(b-c) + b^4(b+c) - 2bc^4 - 2b(b-c)(b+c)(b^2+c^2) = 0$$

$$f(-c) = c^4(b-c) - 2b^4c - c^4(b+c) - 2c(c+b)(b-c)(b^2+c^2) = 0.$$

Primul membru al ecuației de gradul al 4-lea $f(x) = 0$ vedem că se anulează pentru 5 valori ale lui x, *rezultă că el este identic nul*, pentru orice valoare a lui x și deci și pentru $x = a$, în care caz deducem,

$$a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b) =$$

$$-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ab)$$

care este identitatea dată.

Soluție dată de d-l *Negretzu Florea* (lic. Pitești). Observăm că polinomul,

$$P = a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$$

se anulează pentru $a = b$, el admite factorul $a-b$

El admite și factorii $b-c$, $c-a$, fiindcă permutând circular pe a, b, c valoarea lui P rămâne neschimbată. Cum P este omogen, de gradul al 5-lea și simetric când schimbăm circular pe a, b, c, el nu poate fi de cât de forma:

$$(4)\quad P = k(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$$

Rămâne să determinăm numărul k. Particularizăm pe a, b, c și luând de exemplu,

$$a = 0,\ b = 1,\ c = -1$$

găsim

$$-2 = 2k, \quad \text{deci} \quad k = -1,$$

[1]) A se vedea articolul d-lui Maior *O. Bugeanu* „Cum se pot găsi unele identități". R. M. T., An. II, No. 8.

atunci (4) devine:

$$a^4(c-a)+b^4(c-a)+c^4(a-b)=$$
$$-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)$$

Generalizare. D-l *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), a stabilit identitatea mai generală:

$$(5)\quad a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)[(a^{n-2}+a^{n-3}b+\ldots$$
$$\ldots+b^{n-2})+c(a^{n-3}+a^{n-4}b+\ldots+b^{n-3})+\ldots$$
$$\ldots+c^{n-3}(a+b)+c^{n-2}]$$

Primul membru se poate scrie succesiv:

$$a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)=$$
$$a^n(b-c)+bc(b^{n-1}-c^{n-1})-a(b^n-c^n)=$$
$$(b-c)(a^n+b^{n-1}c+b^{n-2}c^2+\ldots$$
$$\ldots+bc^{n-1}-ab^{n-1}-ab^{n-2}c-\ldots-ac^{n-1})=$$
$$(b-c)[a(a^{n-1}-c^{n-1})-b^{n-1}(a-c)\ldots-bc^{n-2}(a-c)]$$
$$=(b-c)(a-c)(a^{n-1}+a^{n-2}c+\ldots$$
$$\ldots+ac^{n-2}-b^{n-1}-b^{n-2}c-\ldots-bc^{n-2})=$$
$$(b-c)(a-c)[a^{n-1}-b^{n-1}+c(a^{n-2}-b^{n-2})+\ldots$$
$$\ldots+c^{n-2}(a-b)]=$$
$$-(a-b)(b-c)(c-a)[a^{n-2}+a^{n-3}b+\ldots$$
$$\ldots+b^{n-2}+c(a^{n-3}+a^{n-4}b+\ldots+b^{n-3})+\ldots$$
$$\ldots+c^{n-3}(a+b)+c^{n-2}]$$

identitatea este stabilită şi pentru $n=4$ găsim identitatea cerută.

D-l *Adam I. Mircea* stabileşte aceiaşi identitate generală (5), desvoltând în două moduri diferite determinantul:

$$\begin{vmatrix} a^n & b^n & c^n \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

aşa cum s'a procedat la soluţia a doua.

Observări. 1) D-nii *Adam I. Mircea* (Constanţa) şi *Ştefănescu Emil* (Bucureşti), observă că împărţind cu $(a-b)(b-c)(c-a)$, ambii membri ai identităţii date se obţine problema 27, cap. IV din C. de P. de d-l A. Ioachimescu, ediţia II-a.

2) D-nii *Adam I. Mircea* (Constanţa) şi *Iliescu Emilian* observă că identitatea cerută este un caz particular al identităţei:

$$x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)=$$
$$-(x-y)(y-z)(z-x)\Sigma x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

unde $\alpha+\beta+\gamma=n-2$, stabilită în „G. M.", an. XVII, pag. 152.

218. — *Să se determine n astfel ca:*

$$\arcsin\frac{1}{n-1}-\arcsin\frac{1}{n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

AUG. COMAN

Soluţiuni date de d-nii: *Bobârnac C. Mircea* (Timişoara), *Cotea Gh.* (lic. Internat, Iaşi). *Cristea Aurel* (lic. Focşani), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Katz Pincu* (lic. Galaţi) *Percea Viorel* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iaşi) *Rigani Cr.* (Şc. Politechnică, Bucureşti) şi *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara).

Dacă notăm,

$$\arcsin\frac{1}{n-1}=a,\quad \arcsin\frac{1}{n+1}=b,$$

deducem:

$$\sin a=\frac{1}{n-1},\quad \sin b=\frac{1}{n+1}$$

şi:

$$\cos a=\sqrt{1-\frac{1}{(n-1)^2}}=\frac{\sqrt{n^2-2n}}{n-1},$$

$$\cos b=\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n+1}.$$

In virtutea notaţiei făcute, relaţiunea dată devine

$$a-b=\frac{\pi}{2}.$$

şi deci: $\cos(a-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b=0$,

Inlocuind aci valori lui cos a, cos b, sin a, sin b, în funcție de n, găsim:

$$\frac{\sqrt{n^4-4n^2}}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}=0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \sqrt{n^4-4n^2}=-1$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad n^4-4n^2-1=0$$

De unde:

$$n=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{5}}$$

Cum sinusul unui arc este cuprins între -1 și $+1$, trebue ca,

$$-1<\frac{1}{n-1}<1 \qquad -1<\frac{1}{n+1}<1,$$

și nu putem lua pentru n, decât valorile:

$$n=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

226. — *Să se arate că,*

$$x^{10p}+x^{5p}-2$$

este divizibil prin, $x^4+x^3+x^2+x+1$, *și să se afle câtul.*

V. ALACI

Soluțiuni date de d-nii: *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bobârnac C. Mircea* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Gabrovski Eugeniu, Georgescu C. Ion* (Pitești), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Grofșorean I. Gh.* (lic. Arad), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru-Haret, București), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Măcrineanu Sterian* (Galați), *Marinescu M. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Popovici Dan* (lic. M-rea Dealu), *Răduleț B. Remus* (lic. Făgăraș), *Stambuleanu Adrian* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Urzică A.* (lic. Deva), *Adam I. Mircea* (lic. Constanța) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

Expresiunea dată căutând a o descompune în factori, o putem scri succesiv.

$$x^{10p}+x^{5p}-2=(x^{5p}-1)(x^{5p}+2)=$$

$$(x^5-1)[x^{5(p-1)}+x^{(p-2)}+\ldots+x^5+1](x^{5p}+2)$$

$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\,x^{5(p-1)}+$$

$$x^{5(p-1)}+\ldots+x^5+1](x^{5p}+2)$$

Acum e ușor de văzut că expresiunea dată este divizibilă prin polinomul, $x^4+x^3+x^2+x+1$, pentrucă îl conține ca factor, iar câtul este:

$$(x-1)(x^{5p}+2)[x^{5(p-1)}+x^{5(p-2)}+\ldots+x^5+1]$$

Observări. 1). D-l *Grosu Ion* a aflat întâi rădăcinele ecuației $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, și a dovedit că expresia $x^{10p}+x^{5p}-2$ se anulează și ea pentru aceleași rădăcini, iar în urmă a aflat câtul.

2) D-nii: *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Georgescu C. Ion* (lic. Pitești), *Popea G. Ovidiu* (lic. Chișinău), *Popovici Th. Ioan*, *Popovici Dan* (lic. M-rea Dealu), *Rigani Cr.* (Șc. Politechnică, București), și *Solomon Wilhem* (lic. Matei-Basarab, București), au generalizat expresiunea demonstrând că expresiunea: $x^{2np}+x^{np}-2$, este divizibilă prin $x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1$, calculând și câtul.

E destul să observăm că:

$$x^{2np}+x^{np}-2=(x-1)[x^{n(p-1)}+x^{n(p-2)}+\ldots$$

$$\ldots+x^n+1](x^{np}+2).$$

3) D-nii *Berdan C-tin* (Bârlad) și *Stoenescu I.* (lic. Cantemir, București) au demonstrat că expresiunea,

$$x^{mnp}+x^{(m-1)np}+\ldots+x^{np}-m$$

este divizibilă prin,

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1,$$

calculând și câtul.

4) In fine d-l *Popovici Tiberiu* (lic. Arad) a dat o generalizare care cuprinde pe cele de mai sus, a demonstrat anume că expresiunea,

$$E=\sum_{i=1}^{m}x^{inp}-\sum_{i=1}^{m}a^{inp}$$

este divizibilă prin,

$$x^{n-1} + x^{n-2}\,a + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1}$$

aflând și câtul.

Vom observa pentru aceasta că avem:

$$E = \sum_{i=1}^{m} (x^{inp} - a^{inp}) = (x^{np} - a^{np}) \sum_{i=1}^{m} [x^{np(i-1)} + x^{np(i-2)}\,a^{np} + \ldots + x^{np}\,a^{np(i-2)} + a^{np(i-1)}]$$

unde;

$$x^{np} - a^{np} = (x^n - a^n)\,[x^{n(p-1)} + x^{n(p-2)} + \ldots + x^n\,a^{n(p-2)} + a^{n(p-1)}]$$

și unde:

$$x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + x^{n-2}\,a + \ldots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

Pentru $a = 1$, avem generalizarea dela No. 3.

Pentru $a = 1$, $m = 2$ avem generalizarea dela No. 2.

Pentru $a = 1$, $m = 2$, $p = 5$ avem problema propusă.

PROBLEME PROPUSE

260. — Fie abc un număr întreg de trei cifre. Să se afle restul diviziunei prin 91 a numărului:

$$N = abcabcabc\ldots abc.$$

GRIGORE ZAPAN

261. Răsturnatul produsului a două numere de două cifre, este produsul răsturnatelor celor două numere. Care sunt acele numere știind că produsul celor două numere este de trei cifre.

EMIL ȘTEFANESCU

262 — Să se demonstreze că produsul a două numere consecutive terminate cu 5, este egal cu patratul mediei lor aritmetice, micșorat cu 25.

STANCULESCU I. C-TIN

263. — Fie O un punct în planul unui triunghiu ABC. Notăm cu A′, B′, C′ simetricele lui O față de mijloacele laturilor triunghiului. Să se demonstreze că dreptele AA′, BB′, CC′ sunt concurente.

I. COSEREANU

264. — Se dă un patrulater oarecare ABCD și o dreaptă ce trece prin punctul de întâlnire E al diagonalelor și taie laturile AD și BC în P și Q. Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor AQ, CP, când PQ se rotește în jurul lui E.

OVIDIU GH. POPEA

265. — Dacă $a + b + c = 0$, atunci:

$$(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ca)^3 + (c^2 - ab)^3 = \frac{1}{2}[(a^3 - b^3)^2 + (b^3 - c^3)^2 + (c^3 - a^3)^2]$$

I. DUMITRIU-ARAD

266. — Să se verifice identitatea:

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$$

M BOBARNAC

267. — Dacă $a \neq 0$ și e baza sistemului de logaritmi, se cere să se demonstreze că ecuația

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2}\,e^{ax}$$

are o rădăcină cuprinsă între zero și unu.

V ALACI

268, — Fie două parabole cu axele paralele; să se demonstreze că locul geometric al polului unei drepte tangente la una din parabole în raport cu cealaltă parabolă, este tot o parabolă cu axul paralel cu acela al parabolelor considerate.

E. ABASOHN

INFORMATIUNI

Prospect

Organizarea şcoalei

Şcoala Politechnică din Timişoara cuprinde deocamdată două secţiuni:

a) Secţiunea de ingineri electro-mecanici;

b) Secţiunea de ingineri de mine şi metalurgie.

Alte secţiuni de specializare vor putea fi create în legătură cu nevoile locale sau cele generale ale ţării.

Invăţământul se întinde pe durata a patru ani de studii, după care studentul obţine diploma de inginer, în specialitatea pe care şi-a ales'o.

Pe lângă aceşti patru ani de studii mai există pe lângă şcoală diviziunea pregătitoare, destinată ca să dea studenţilor cari nu pot intra direct în şcoală pregătirea matematică necesară pentru începerea carierei technice. Durata studiilor în diviziunea pregătitoare este de un an.

Admiterea studenţilor

Admiterea şi matricularea studenţilor în anul I al şcolii se face pe baza unui examen de admitere ce se ţine la 1 Octombrie.

Inscrierea la acest examen se face prin o cerere timbrată adresată Direcţiunei şcoalei şi însoţită de următoarele acte originale:

a) Actul de naştere;

b) Un certificat medical constatând că candidatul este de o constituţie sănătoasă;

c) una din următoarele diplome:

Diploma de absolvire a opt clase de liceu,

Diploma de absolvire a unei şcoli superioare de comerţ,

Diploma de absolvire a unei şcoli de conducători de lucrări publice,

Diploma de absolvire a unei şcoli superioare de arte şi meserii însoţită de certificatul de absolvire a patru clase secundare,

Diplomele altor şcoli străine vor trebui să fie echivalate de Ministerul Instrucţiunii.

Examenul de admitere are loc înscris şi oral în faţa unei comisiuni sub preşedenţia directorului şcoalei. Candidaţii care nu posedă bine limba română pot da examenul în oricare din limbile franceză, germană, maghiară indicând aceasta în cererea de înscriere.

Cererile de înscriere pentru examen se primesc la cancelaria şcolii până la 20 Septembrie cel mai târziu, cele pentru diviziunea pregătitoare până la 10 Octombrie.

Candidaţii reuşiţi la examen vor fi înmatriculaţi în anul I al şcolii în ordinea de merit după notele obţinute.

Candidaţii care nu vor reuşi la examen sau acei care nu sunt suficient pregătiţi pentru a se prezenta la examen se pot înscrie direct în diviziunea pregătitoare.

Studenţii altor şcoli Politechnice străine se pot înscrie în urma unui examen de diferenţă care va fi hotărît de consiliul profesoral.

Taxa

Taxele şcolare sunt următoarele:

200 lei taxa de frequenţă anual.

100 lei taxa de înscriere pentru examenul de admitere în şcoală.

Aceste taxe se achită înainte de închiderea înscrierilor adică de 20 Septembrie resp. 10 Octombrie. De aceste taxe nu poate fi scutit nimeni. Candidaţii care nu vor reuşi la examen şi voesc a se înscrie în diviziunea pregătitoare, vor avea de achitat taxa de frequenţă anuală de 200 lei.

Studenţii

Pe lângă Şcoala Politechnică există un cămin care asigură studenţilor burse sub formă de întreţinere. La dispoziţia studenţilor se găseşte un dormitor unde însă fiecare trebue să-şi aducă rufele pentru pat şi o cantină unde iau masa.

Aceste burse se acordă în ordine de merit şi numai celor lipsiţi de mijloace. Pentru aceasta candidaţii vor adresa şcolii cererile lor, întovărăşite de un certificat vizat de percepţie din care să se constate situaţia materială a familiei.

Programul

cunoştinţelor cerute la examenul de admitere în anul I al şcoalei este publicat în *„Monitorul Oficial“*, No. 81, din 15 Iulie 1922.

I. *Geometria elementară:* Geometria plană. Geometria în spaţiu. Geometria Descriptivă.

II. *Mecanica elementară:* Statica. Elemente de Cinematică şi Dinamică.

III. *Algebra.*

IV. *Trigonometria.*

V. *Geometria Analitică.*

VI. *Fizica:* Gravitatea. Optica Geometrică. Acustica.

VII. *Chimia:* Chimia Anorganică.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

ANUL III. 15 AUGUST 1923 No. 6

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 5 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. TR. LALESCU. SIMETRIE, OMOGENITATE
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 143, 155, 167, 188, 189, 196, 220, 228.
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Şcoalei Politechnice din Timişoara

---

ANUL III. — No. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1923

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

SIMETRIE, OMOGENITATE[1]

de TRAIAN LALESCU

1. *Definițiuni.* Un polinom $F(x\,y)$ este *simetric* în raport cu x și y, când schimbând pe x cu y, polinomul nu-și schimbă valoarea, adică:

$$F(x, y) \equiv F(y, x).$$

Exemple. Polinoamele,

$$x^3+y^3,\ x^3+y^3+3xy,\ x^2+y^2+xy$$

sunt simetrice.

Un polinom $F(x, y)$ este *antisimetric* în raport cu x și y când schimbând pe x cu y, polinomul își schimbă semnul, adică dacă:

$$F(x, y) \equiv -F(y, x).$$

Exemple: Polinoamele:

$$x-y,\quad x^3-y^3$$

sunt antisimetrice.

Noțiunea de polinoame simetrice se poate extinde și la mai multe variabile. De exemplu, funcțiunea:

$$F(x, y, z) = x^2+y^2+z^2,$$

este simetrică, fiindcă avem:

$$F(x, y, z) = F(y, x, z) = F(y, z, x) = \ldots$$

2) *Reguli de calcul. a) Suma a două polinoame simetrice este un polinom simetric.*

Fie, $P_1(x, y)$ și $P_2(x, y)$ două polinoame simetrice.

Punem:

$$P_1(x, y)+P_2(x, y) \equiv S(x, y),$$

Schimbând pe x cu y, obținem:

$$P_1(y, x)+P_2(y, x) = S(y, x).$$

Dar:

$$P_1(y, x) \equiv P_2(x, y),\ P_2(y, x) \equiv P_2(x, y).$$

Deci:

$$S(x, y) \equiv S(y, x)$$

b) Diferența a două polinoame simetrice este un polinom simetric.

Demonstrație identică.

c) Produsul a două polinoame simetrice este un polinom simetric.

d) Câtul a două polinoame simetrice, divizibile unul cu altul, este un polinom simetric.

Constatăm deci că simetria este o proprietate invariantă față de operațiunile fundamentale.

e) Câtul a două polinoame antisimetrice este un polinom simetric.

Fie, $F(x, y)$ și $f(x, y)$ două polinoame antisimetrice.

Punem,

$$Q(x, y) = \frac{F(x, y)}{f(x, y)}$$

Schimbând pe x cu y, obținem:

$$Q(y, x) = \frac{F(y, x)}{f(y, x)} = \frac{-F(x, y)}{-f(x, y)} = Q(x, y).$$

Teoreme: 1°. *Un polinom antisimetric în x și y este divizibil prin, $x-y$.*

Polinomul $F(x, y)$ fiind antisimetric, vom avea:

$$F(x, y) \equiv -F(y, x).$$

[1] Din „*Cursul de Algebră superioară*“ al d-lui profesor *Traian Lalescu*, care va apărea în curând.

Punând $x = y$, căpătăm:

$$F(y, y) \equiv -F(y, y)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad F(y, y) \equiv 0,$$

ceiace ne demonstrează teorema.

2°. *Dacă un polinom simetric în x și y este divizibil prin $x - y$, el este divizibil și prin $(x - y)^2$.*

Să punem:

$$F(x, y) = (x - y) F_1(x, y).$$

Schimbând pe x cu y, obținem:

$$F(y, x) = (y - x) F_1(y, x).$$

Dar din,

$$F(x, y) = F(y, x),$$

rezultă,

$$F_1(x, y) = -F_1(y, x),$$

deci funcțiunea $F_1(x, y)$ este antisimetrică, deci divizibilă, — conform teoremei precedente —, prin $x - y$.

Avem deci

$$F_1(x, y) = (x - y) F_2(x, y)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad F(x, y) = (x - y)^2 F_2(x, y).$$

3°. *Orice polinom de două variabile, $P(x, y)$, se poate despărți într'un polinom simetric și altul antisimetric.*

Să facem suma:

$$(1) \qquad P(x, y) + P(y, x) = S(x, y).$$

Observăm că dacă schimbăm pe x cu y, suma rămâne aceiași, deci $S(x, y)$ este un polinom simetric.

Făcând diferența polinoamelor $P(x, y)$ și $P(y, x)$

$$(2) \qquad P(x, y) - P(y, x) = D(x, y)$$

și schimbând pe x cu y, obținem:

$$D(y, x) = P(y, x) - P(x, y) = -D(x, y)$$

deci funcția $D(x, y)$ este antisimetrică.

Adunând relațiile (1) și (2), obținem:

$$P(x, y) = \frac{1}{2} S(x, y) + \frac{1}{2} D(x, y),$$

relație care demonstrează teorema.

3. *Omogenitate.* Un polinom de mai multe variabile este *omogen* în raport cu acele variabile, când gradul termenilor săi în raport cu acele variabile, este același.

Exemple: Polinoamele:

$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + x y^2 z, \quad x^4 + y^4 + z^4$$

sunt omogene și de gradul al 4-lea în raport cu x, y, z.

Funcțiunea, $a x + b y + c z$, este forma generală a funcțiunilor lineare omogene.

Funcțiunea,

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + D x z + 2 E y z + F z^2,$$

este forma generală a funcțiunilor omogene de gradul al 2-lea și așa mai departe.

Proprietăți:

1°. *Suma a două funcțiuni omogene de același grad, este o funcțiune omogenă de același grad.*

2°. *Produsul a două funcțiuni omogene respectiv de grad m și n este o funcțiune omogenă de gradul $m + n$.* de oarece termenii produsului se obțin înmulțind doi termeni oarecare ai celor două polinoame. Unul fiind de grad m și celălalt de gradul n, produsul lor va fi de gradul $m + n$.

3°. *Dacă un polinom omogen, de gradul m este descompus în doi factori omogeni, și unul este de gradul n ($n \leq m$), atunci celălalt va fi de gradul $m - n$.*

4. Noțiunile de *simetrie* și *omogenitate* înlesnesc calculele pentru descompunerea polinoamelor în factori.

Vom trata următorul exemplu:

1°. *Fie să descompunem în factori, expresia:*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3 x y z.$$

Funcțiunea este *simetrică* și *omogenă*. Vom fi deci conduși a căuta factorii săi care pot fi numai de primul grad sau al 2-lea, printre funcțiunile simetrice și omogene.

Expresiunea:

$$x + y + z$$

este conținută ca factor, de oarece înlocuind mai sus x prin $-(y+z)$, polinomul devine identic nul. In virtutea paragrafului 2. d' și câtul va fi *omogen* și *simetric* de gradul al 2-lea.

Vom avea deci neapărat:

$$x^3+y^3+z^3-3xyx\equiv$$
$$(x+y+z)[a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)]$$

Determinarea coeficienților încă necunoscuți a și b, se face în general dând literilor valori întregi particulare, căci identitatea e adevărată pentru orice valori date literilor.

In cazul nostru, având două necunoscute, ne ajung două sisteme de valori. Insă valoarea lui a se vede direct că este 1 din împărțire, căci $x^3 : x^2 = x$.

Pentru a obține pe b facem,

$$x=y=z=1$$

și deducem,

$$9(b+1)=0, \text{ adică } b=-1.$$

Deci:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

NOTE MATEMATICE

Asupra problemei 70, pag. 40, No. 3 R. M. T. an. III.

In cele de mai jos, mă încerc a da o generalizare acestei probleme, propunându-mi a arăta că expresiunea:

(1) $$E=\arcsin(2A^2-1)\pm 2\arcsin A$$

este independentă de x, A fiind dat de relația:

$$A=\sqrt[m]{\varphi(x)}$$

Pentru aceasta să punem:

(2) $$\sin\alpha=2A^2-1 \quad \text{și} \quad \sin\beta=A$$

Expresiunea (1) devine:

$$E=\alpha\pm 2\beta$$

Eliminând pe A între egalitățile (2) obținem:

$$\sin\alpha=2\sin^2\beta-1=-\cos 2\beta=\cos(\pi-2\beta)$$

$$\alpha+2\beta=(4k+3)\frac{\pi}{2},\quad \alpha-2\beta=(4k-1)\frac{\pi}{2}$$

Q. E. D.

Pentru $m=2$, $\varphi(x)=\frac{1}{2}x$ suntem în cazul problemei 70.

Introducând aceste valori în (1) găsim:

$$E=\arcsin(x-1)\pm 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$$

In mod analog, se poate stabili să expresiunile:

$$E=\arcsin(2A^2-1)\pm 2\arccos A$$

$$E=\arcsin\frac{1}{16}A(A^2-12)\pm 3\arccos\frac{1}{4}A$$

sunt independente de x.

STOENESCU AL. ION
„Lic. Cantemir" Buc.

Aria unui triunghiu în funcție de înălțimi.

Se știe că:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Am însă succesiv:

(1) $$4S=4\sqrt{p\,\Pi(p-a)}=\sqrt{2p\,\Pi(2p-2a)}=$$
$$\sqrt{(a+b+c)\,\Pi(b+c-a)}$$

Se cunoaște de asemenea, că:

(2) $$\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

Inlocuesc în (1) pe a, b, c prin cantitățile proporționale lor din (2). Putem face aceasta căci termenii fracțiilor din (2) sunt omogeni și de același grad.

Vom obține astfel:

$$4S=\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\prod\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}$$

sau scăpând de numitori:

$$4S = \frac{1}{h_a^2 h_b^2 h_c^2}\sqrt{\Sigma h_b \cdot h_c \cdot \Pi (h_c h_a + h_b h_a - h_b h_c}$$

tocmai ceiace'mi propusesem.

FLORIAN ER. GEORGESCU
cl. VII R. lic. Cantemir-Vodă București

BIBLIOGRAFIE

P. Sergesco. Application de la théorie des résidus a la demonstration d'un théoréme *d'Hermite* sur l'indice d'une fraction rationnelle.

P. Sergesco. Sur les noyaux symétrisables. (Extras din „Comptes rendus des séances de i'Académie des Sciences" 18 Iunie 1923).

Buletinul asociației de matematici pure și aplicate. Anul II, No. 10, Iunie 1923. Les séries trigonométriques de *Tr. Lalescu.* Sur les fonctions periodiques, de *E. Abasohn.* O metodă grafică pentru aflarea valorii eficace a funcțiunilor periodice polinomiale, de *E. Abasohn.*

Gazeta Matematică, anul XXVIII, No, 11, Iulie 1923. Asupra punctelor și triunghiurilor isobarice, de B. M. Barbălatt.

PROBLEME REZOLVATE

143. — *Se consideră primii m multiplii de n și se fac produsele două câte două în toate modurile posibile a acestor numere. Să se găsească suma acestor produse: Aplicația pentru* $n = 12$.

N. GEORGESCU-ROEGEN

Soluțiuni date de d-nii: *Coșereanu Ion* (Timișoara), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Iliescu I. Ion* (lic. Galați), *Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal), *Popea G. Ovidiu* (Chișinău), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Rigani Cr.*, *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani).

Primii m multipli de n sunt:

$$n,\ 2n,\ 3n, \ldots mn.$$

Insemnând cu S suma produselor două câte două a acestor numere și observând că n^2 intră în fiecare produs, avem:

$$S = n^2[1.2 + 1.3 + \ldots + 1.m + 2.3 + \ldots + (m-1)m]$$

sau:

$$S = n^2 \cdot S_1.$$

S_1 reprezentând suma produselor două câte două a primelor m numere.

Din identitatea:

$$(1 + 2 + \ldots + m)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 + 2S_1,$$

deducem însă:

$$S_1 = \frac{1}{2}(1+2+\ldots+m)^2 - \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \ldots + m^2)$$

$$= \frac{m^2(m+1)^2}{8} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{12}$$

$$= \frac{m(m+1)(m-1)(3m+2)}{24} \cdot n^2.$$

Atunci (1) devine:

$$S = \frac{(m-1)m(m+1)(3m+2)}{24} \cdot n^2$$

Aceasta este suma căutată.

Pentru $n = 12$, găsim:

$$S = 6(m-1)m(m+1)(3m+2),$$

Au dat soluțiuni mai lungi, d-nii: *Alexandrescu Mihail* (Constanța), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Grünfeld B. Maximilian* (lic. Brăila), *Iliescu E.*, *Ionescu I. Ilie* (Caracal), *Katz Pincu* (Galați), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (Giurgiu), *Măru D-tru* (lic. Galați), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Negretzu Florea* (Pitești), *Nicolau M. Iulian* (lic. Pitești), *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), și *Vasilescu C. Virgil* (lic. Ploești).

Observări: 1) D-nii: *Coșereanu Ion, Georgescu Er. Florian, I. N. Georgescu-Val* și *Ioniță M. Ioan,* au observat că pentru $n = 7$, regăsim problema No. 2641 din „G. M.", vol. XXV, pag. 135.

2) D-l *I. N. Georgescu-Val*, întreabă: Care este suma produselor luate câte i a primelor m multipli de n?

155. — *Să se arate că numerile din şirul*

729, 970299, 997002999, 999700029999

sunt cuburi perfecte.

COSEREANU I.

Soluţiuni date de d-nii: *Amărăscu O. Gavril* (lic. Caracal), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Marinescu I. Gheorghe* (Piteşti), *Ionescu I. Longin* (lic. Caracal), *Popescu N. Nicu* (lic. Câmpina) şi *Weiss Leon* (lic. Galaţi).

Al n-lea număr din şir, pe care îl notăm cu N_n, observăm că e format din cifra 9 repetată de $n-1$ ori, după care urmează cifra 7, apoi $n-1$ zeruri şi în fine se termină cu n de 9, având în total $3n$ cifre.

Putem deci scrie:

$$N_n = 9(10^{n-2}+10^{n-1}+\ldots+10+1).10^{2n+1}+$$
$$7.10^{2n}+2.10^n+9(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)$$

In paranteze avem însă nişte progresiuni geometrice, le efectuăm şi avem:

$$N_n = 9.\frac{10^{n-1}-1}{10-1}.10^{2n+1}+7.10^{2n}+2.10^n+9\frac{10^n-1}{10-1}$$
$$= (10^{n-1}-1).10^{2n+1}+7.10^{2n}+2.10^n+10^n-1$$
$$= 10^{3n}-10^{2n}(10-7)+10^n(2+1)-1$$
$$= 10^{3n}-3.10^{2n}+3.10^n-1 = (10^n-1)^3,$$

sau:

$$N_n = 999\ldots99^3,$$

având n de 9.

Numerile din şirul dat sunt deci cuburi perfecte.

Au făcut simple verificări d-nii: *David Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara) şi *Solomon Weiss* (lic. Galaţi).

167. — *Să se calculeze valoarea expresiuuei:*

$$E = \frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}\sqrt[q]{\frac{m}{n}}}}}$$

numărul radicalilor suprapuşi fiind p şi ce devine această expresiune când p tinde către infinit.

STOENESCU AL. I.

Putem scrie succesiv:

$$E = \frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q^2}}\cdots\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{q^p}}$$
$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^p}}$$

Exponentul reprezintă însă suma unei progresiuni geometrice cu raţia $\frac{1}{q}$, care este:

$$1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^p} = \frac{\frac{1}{q^{p+1}}-1}{\frac{1}{q}-1} = \frac{q^{p+1}-1}{q^p(q-1)}$$

Atunci,

$$E = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{q^{p+1}-1}{q^p(q-1)}}$$

Acum să calculăm limita lui E pentru $p=\infty$, avem:

$$\lim_{p=\infty} E = \left(\frac{m}{n}\right)^{\lim\limits_{p=\infty}\frac{q^{p+1}-1}{q^p(q-1)}}$$

Dacă $q \leq 1$, atunci:

$$\lim_{p=\infty}\frac{q^{p+1}-1}{q^{p+1}-q^p} = \infty$$

şi

$$\lim_{p=\infty} E = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } m > n \\ 1, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } m < n \end{cases}$$

Dacă $q > 1$, atunci:

$$\lim_{p=\infty} E = \frac{q^{p+1}-1}{q^{p+1}-q^p} = \lim_{p=\infty}\frac{1-\frac{1}{q^{p+1}}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{q}{q-1}$$

şi

$$\lim_{p=\infty} E = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{q}{q-1}} = \frac{m}{n}\sqrt[q-1]{\frac{m}{n}}$$

Soluţiuni date de d-nii: *Adam I. M.* (Constanţa), *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Antoniu S. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Arcadian Nicu* (lic. Caracal), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bărglăzan A.* (Sibiu), *Bercovici Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Berdan C.* (Bârlad), *Biernaschi C-tin* (Şc. de Artilerie), *Bobârnac Mircea* (Timişoara), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Botiş Virgil* (lic. Arad), *Brăileanu Alexandru* (lic. Constanţa), *Buşilă Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Carp Gh. Jean* (lic. Huşi), *Ciolacu Şt. Miron* (lic. Caracal), *Cocorandu Mircea* (Braşov), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Coşereanu Ion* (Timişoara), *Dobrescu-Băbici, Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Dragomir N. Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dumitrescu G. M.* (lic. Craiova), *Flickstein I.* (lic. Cernăuţi), *Focşăneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Gheorghiu Gh. Lucian, Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Giotta Vincenţiu* (lic. Bârlad), *Gogălniceanu M. Mihail* (lic. Brăila), *Goldenberg I.* (Galaţi), *Grünberg H.* (Galaţi), *Grünfeld Max.* (lic. Brăila), *Haimovici Salo, Harth Ernst* (Câmpulung, Bucovina), *Herscovici Emanoil* (Galaţi), *Iliescu Em* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu N. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Ioniţă M. Jean* (Şc. de Artilerie), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Mareş Corneliu* (Bacău), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mateescu G.* (lic. Galaţi), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mitran Şt. Grigorie* (lic. Craiova), *Muşta St.* (Timişoara), *Negretzu Florea* (Piteşti), *Oprişanu G. Ernest, Orbonaş I.* (Deva), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Panait Ion* (lic. Galaţi), *Pârâianu Nicu* (Şc. Navală), *Petrescu Cernea, Pinchis M.* (lic. Galaţi), *Pollak Alex.* (Timişoara), *Popea G. Ovidiu* (Chişinău), *Popovici Chr. Ion* (lic. Galaţi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Răuţ Const.* (lic. M-rea Dealu), *Schileru C. Dili* (Gorj), *Schönfeld H. Conrad* (lic. Botoşani), *Scodrano Alexandru* (Durostor), *Septilici Raul* (Şc. de Artilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solacolu M. Traian* (lic Spiru-Haret, Bucureşti), *Stănescu A. D-tru* (Galaţi), *Solomon L. Weiss* (lic. Galaţi), *Solomon Wilhelm* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Stamatiu Mihail, Stănciulescu Gh.* (lic. Piteşti), *Stefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Stoenescu Alexandru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Sufletel Aurel* (Şc. de Artilerie), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Trincă D. Marin* (Caracal), *Tunaru R. Traian* (lic. Craiova). *Tuducescu A. N., Urzică Aurel* (lic. Deva), *Ulman Octav* (Şc. Politehnică, Timişoara), *Vasilescu I. D.* lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu C. Virgil* (Ploeşti), *Weiss Leon* (lic. Galaţi), *Witzmann H. Marcu* (lic. Galaţi), şi *Zaider Moise* (lic. Galaţi).

188. — *Între ce limite trebue să varieze y pentruca ecuaţia:*

$$x^2 - 4xy + y^2 + 3x - 10y + 1 = 0,$$

să aibă două rădăcini distincte pentru x şi între ce limite trebue să varieze x pentruca să avem pentru y două valori? Să se determine în ambele cazuri natura semnelor rădăcinelor şi să se pună rezultatele sub formă de tablouri.

M. VASILIU

Soluţiuni date de d-nii: *Katz Pincu* (Galaţi), *Negretzu Florea* (Piteşti) şi *Niculescu Alexandru* (lic. Matei Basarab, Bucureşti).

Ecuaţia în x, privind y cu parametru este:

$$(1) \qquad x^2 - (4y - 3)x + y^2 - 10y + 1 = 0.$$

Pentru a avea două rădăcini distincte, trebue ca realizantul:

$$R = 12y^2 + 16y + 5 \neq 0,$$

adică $y \neq -\frac{5}{6}$ şi $-\frac{1}{2}$, rădăcinele lui $R = 0$.

Când: $y < -\frac{5}{6}$ sau $y > -\frac{1}{2}$, rădăcinele lui (1) sunt reale, iar când: $-\frac{5}{6} < y < -\frac{1}{2}$ ele sunt imaginare. Pentru a cerceta natura semnelor rădăcinelor ecuaţiei (1), scrim suma şi produsul lor.

$$S = 4y - 3$$

$$P = y^2 - 10y + 1$$

Suma e pozitivă pentru, $y > \frac{3}{4}$; nulă, pentru $y = \frac{3}{4}$; negativă pentru $y < \frac{3}{4}$. Produsul e pozitiv pentru,

$$y < 5 - 2\sqrt{6} \text{ sau } y > 5 + 2\sqrt{6};$$

nul, pentru $y = 5 \pm 2\sqrt{6}$; şi negativ pentru

$$5 - 2\sqrt{6} < y < 5 + 2\sqrt{6}$$

Discuţia complectă o avem rezumată în următorul tablou:

y	R	P	S	Natura și semnele rădăcinelor
$-\infty, -\frac{5}{6}$	+	+	−	Reale, negative
$-\frac{5}{6}$	0	+	−	O rădăcină dublă $=-\frac{19}{6}$
$-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}$	−	+	−	Imaginare
$-\frac{1}{2}$	0	+	−	O rădăcină dublă $=-\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}, 5-2\sqrt{6}$	+	+	−	Reale, negative
$5-2\sqrt{6}$	+	0	−	Reale, $x_1=0,\ x_2=17-8\sqrt{6}$
$5-2\sqrt{6}, \frac{3}{4}$	+	−	−	Reale, de semne contrare, cea mai mare negativă
$\frac{3}{4}$	+	−	0	Reale, egale și de semne contrare, $x_1=-\frac{\sqrt{95}}{4},\ x_2=\frac{\sqrt{95}}{4}$
$\frac{3}{4}, 5+2\sqrt{6}$	+	−	+	Reale, de semne contrare, cea mai mare pozitivă
$5+2\sqrt{6}$	+	0	+	Reale, $x_1=0,\ x_2=17+8\sqrt{6}$
$+2\sqrt{6}, +\infty$	+	+	+	Reale, pozitive

Ecuația în y, privind x ca parametru este:

$$(2)\qquad y^2-2(2x+5)y+x^2+3x+1=0$$

Pentru a avea două rădăcini distincte, trebue ca realizantul:

$$R=3x^2+17x+24\neq 0,$$

adică $y\neq -3$ și $-\frac{8}{3}$, rădăcinele lui $R=0$.

Când: $y<-3$ sau $y>-\frac{8}{3}$, rădăcinele lui (2) sunt reale, iar când:

$$-3<y<-\frac{8}{3}$$

ele sunt imaginare. Pentru a cerceta natura semnelor rădăcinelor ecuației) 2), scrim suma și produsul lor

$$S=4x+10$$

$$P=x^2+3x+1.$$

Suma e pozitivă pentru, $x>-\frac{5}{2}$; nulă pentru, $x=-\frac{5}{2}$; negativă pentru $x<-\frac{5}{2}$. Produsul e pozitiv pentru

$$y<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\ \text{și}\ y>\frac{-3+\sqrt{5}}{2};$$

nul, pentru $y=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ și negativ pentru

$$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<y<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

Discuția complectă o avem în următorul tablou:

x	R	P	S	Natura şi semnele rădăcinelor
$-\infty, -3$	+	+	−	Reale, negative
-3	0	+	−	O rădăcină dublă $= -1$
$-3, -\frac{8}{3}$	−	+	−	Imaginare
$-\frac{8}{3}$	0	+	−	O rădăcină dublă $= -\frac{1}{3}$
$-\frac{8}{3}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$	+	+	−	Reale, negative
$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$	+	0	−	Reale, $y_1 = 0,\ y_2 = 4 - 2\sqrt{5}$
$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, -\frac{5}{2}$	+	−	−	Reale, de semne contrare, cea mai mare negativă
$-\frac{5}{2}$	+	−	0	Reale, egale şi de semne contrare, $y_1 = -\frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2}$
$-\frac{5}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	+	−	+	Reale de semne contrarc, cea mai mare pozitivă
$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	+	0	+	Reale, $y_1 = 0,\ y_2 = 4 + 2\sqrt{5}$
$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty$	+	+	+	Reale, pozitive

Soluţiuni parţiale date de d-nii: *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Dospinoiu N.* (Conductor de Lucrări Publice), *Georgescu P. C.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Popea Ovidiu* (lic. Chişinău), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Solomon Weiss* (lic. Galaţi), *Weiss Leon* (lic. Galaţi) şi *Witzmann H. Marcu* (lic. Galaţi).

Alte soluţiuni, neacceptabile

189. — *Care este relaţia de condiţie, pentruca ecuaţia:*

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

să aibă, $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$ *şi să se rezolve în acest caz:*

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$$

MEHLMANN THEODOR

Alăturând relaţiei date, relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, avem:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \\ x_1 (x_2 + x_3 + x_4) + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = b \\ x_1 (x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) + x_2 x_3 x_4 = -c \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = d \end{cases}$$

Intre aceste cinci relaţiuni, trebue să eliminăm pe x_1, x_2, x_3, x_4.

A 2-a relaţie, ţinând seama de prima ne dă:

$$(1) \qquad x_1 = -\frac{a}{2}$$

Din realaţia 3-a, ţinând seamă de (1), deducem

$$(2) \qquad x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = b - \frac{a^2}{4}$$

A 4-a relaţie, ţlnând seamă de (1), (2) şi de:

$$x_2 x_3 x_4 = -\frac{2d}{a}$$

scoasă din ultima, devine:

$$-\frac{a}{2}\left(b-\frac{a^2}{4}\right)-\frac{2d}{a}+c=0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad (3) \quad a^4-4a^2b+8ac-16d=0.$$

Relaţia (3) este cea căutată.

Aplicaţie. Coeficienţii ecuaţiei,

$$(4) \qquad x^4+2x^3+3x^2+4x+2=0,$$

observăm că satisfac relaţia (3), rezultă atunci că o rădăcină a ei este:

$$x_1=-\frac{a}{2}=-1.$$

Divizând primul membru al ecuaţiei cu $x+1$, celelalte rădăcini ale ei sunt date de ecuaţia:

$$x^3+x^2+2x+2=0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad (x+1)(x^2+2)=0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x_2=-1, \quad x_{3,4}=\pm i\sqrt{2} \quad (i=\sqrt{-1}).$$

Rădăcinele căutate sunt deci:

$$-1, \quad -1, \quad \pm i\sqrt{2}$$

Observare. Am fi putut rezolva ecuaţia (4), direct, fără a utiliza rezultatele stabilite înainte, observând că pentru $x=-1$, primul membru al ei se anulează.

Soluţiuni analoage date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Balint Emil* (Năsăud), *Bărglăzan A.* (lic. Sibiu), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Berdan C-tin* (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Boju, Bolgiu Ovidiu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Branover Lev* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică Timişoara), *Cocorandu M.* (lic. Braşov), *Creţoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Coşereanu Ion* (Timişoara), *Crăiniceanu Gh.* (Cluj), *Dobrescu Băbici* (lic. Caracal), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Flickstein I.* (Cernăuţi), *Georgescu P. C.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Gheorghiu Gh. Lucian, Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Iliescu I. Ion* (lic. Galaţi), *Ionescu B. Ioan* (lic. Piteşti), *Ioniţă M. Ioan* (Şc. de Artilerie), *Iordache N. I.* (student), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Lelescu Luciliu* (lic. M-rea Dealu), *Măcrineanu Sterian* (Galaţi), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Negretzu Florea* (Piteşti), *Oprişanu Ernest* (student, Bucureşti), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Samoilă D-tru.* (lic. Câmpina), *Scodrano Alexandru* (Durostor), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solomon N.* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Stambuleanu Adrian* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Stănescu A. Nicolae* (lic. Craiova), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Vătăsan Ovid* (Braşov) *Weiss Leon* lic. (Galaţi) şi *Brătescu H. Mihail* (lic. R.-Vâlcea).

Observare. D-l *Popovici Tiberiu* a găsit că condiţia ca ecuaţia mai generală:

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,$$

să aibă:

$$x_1=x_2+x_3+\ldots+x_n,$$

este:

$$A_1^n-2^2A_1^{n-2}A_2+2^3A_1^{n-3}A_3-2^4A_1^{n-4}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-2}2^nA^n=0,$$

o rădăcină a ecuaţiei fiind $x_1=-\frac{A_1}{2}$

196 — *Să se găsească numerile de trei cifre, ştiind că diferenţa dintre ele şi suma cifrelor lor este un cub perfect.*

AL. PAMULA.

Soluţiuni date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Arcadian Nicu* (lic. Caracal), *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Başta* (Tg.-Jiu), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Brădeţeanu C. Cornel* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Cazacincu A. Vasile* (lic. Naţional, Iaşi), *Coşereanu Ion* (Timişoara), *Cretoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dobrescu Băbici* (Caracal), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Goldstein M. I.* (Bârlad), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Herscovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Iliescu St. Dima* (lic. Militar, Tg.-Mureş), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal), *Katz Pincu* (Galaţi), *Lăzărescu Fl. Stefan* (Giurgiu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mateescu G.* (lic. Galaţi), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Meirovici Iacab* (Botoşani), *Miclescu*

Andrei (Şc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mitescu D-tru* (lic. Militar, Tg.-Mureş), *Negretzu Florea* (Piteşti), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Nicolescu Angelo* (lic. Militar, Tg.-Mureş), *Nicolescu Isaia* (Ploeşti), *Popea Ovidiu* (Chişinău), *Popovici P. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Răuţ C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Röder Carol* (Bârlad), *Şeptelici Raul* (Şc. de Atilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Solomon N.* (Timişoara), *Solomon L. Weiss* (lic. Galaţi), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Stoenescu Gh.* (lic. Militar, Tg.-Mureş), *Stroescu Gheorghe* (lic. Militar, (Tg.-Mureş), *Theodorescu Florin* (liceul Militar, (Tg.-Mureş), *Toma Nicolae* (lic. Militar, Tg.-Mureş), *Weiss Leon* (lic. Galaţi), *Zuckermann Bernard* (Bârlad), *Rădulescu P. Mariu* (lic. Giurgiu) şi *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu).

Numerile cerute sunt de forma:

$$100\,a + 10\,b \mid c,$$

a, b, c fiind de o singură cifră. Conform enunţului trebuie ca:

$$100\,a + 10\,b + c - a - b - c = 9\,(11\,a + b),$$

să fie un cub perfect şi e de ajuns ca:

$$11\,a + b = 3\,r^3$$

r fiind întreg.

Ţinând seamă că a şi b sunt de o singură cifră, trebuie ca:

$$11 \leq 3\,r^2 \leq 108$$

Rezultă de aci: $r = 2$, sau $r = 3$.

Dacă luăm $r = 2$, atunci:

$$11\,a + b = 24$$

şi deci: $a = 2,\ b = 2.$

Dacă $r = 3$, atunci:

$$11\,a + b = 81,$$

şi deci: $a = 7,\ b = 4.$

Numerile căutate sunt de forma:

$$22\,c \text{ sau } 74\,c,$$

unde pentru c putem lua orice cifră.

Avem deci următoarele 20 de soluţiuni:

220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229,
740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749,

Au găsit mai puţine soluţiuni, d-nii: *Berdan C.* (10 soluţiuni), *Bercovici David* (10 sol.), *Ghidalisohn I.* (2 sol.), *Măcrineanu G. Sterian* (2 sol.), *Pătroianu Mihai* (2 sol.), şi *Popovici Chr. Ion* (2 sol.)

Observări. 1) D-nii: *Cazacincu A. Vasile* (lic. Naţional Iaşi), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteasul, Bucureşti), şi *Iliescu Şt. Dima* (lic. Militar, Tg.-Mureş), au observat că: dacă în enunţ s'ar înlocui cuvântul „cub" prin „patrat", atunci avem problema 2979 din „G. M", anul XXVIII, No. 2.

2. D-nii: *Dospinoiu N.* şi *Georgescu Er. Florian* au găsit că numerile de două cifre, care satisfac enunţul, sunt:

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 şi 39.

3. D-nii: *Dospinoiu N.*, *Georgescu* şi *Negretzu Florea*, au găsit că numerile de patru cifre, care satisfac enunţul, sunt:

$174\,d$, $339\,d$, $585\,d$ şi $928\,d$, $d = 0, 1, 2, \ldots 9,$

în total 40 de soluţii:

4. D-nii: *Georgescu Er. Florian* şi *Mihăescu D. C-tin* enunţă următoarea problemă mai generală:

Să se găsească numerile de n cifre, ştiind că diferenţa dintre ele şi suma cifrelor lor este egală N^m (N *şi m numere intregi).*

5. D-l: *Ghiţescu Virgil*, schiţează soluţia problemei generale de la 4. într'un sistem oare care de numeraţie.

220. — *Să se găsească un patrat perfect de 4 cifre a b c d, astfel ca numărul de 3 cifre a b c să fie patrat perfect şi format din cifre consecutive, de asemenea şi numerile c d şi d să fie patrate perfecte.*

EMIL ŞTEFANESCU

Soluțiuni date de d-nii: *Bârglăzan Aurel* (lic. Sibiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Coșereanu Ion* (Timișoara), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Giotta Vincențiu* (lic. Bârlad), *Goldstein L. M.* (seminarul Pedagogic, București), *Grigorescu I.* (lic. M-rea Dealu), *Grofșorean I. G.* (lic. Arad), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru-Haret, București), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (lic. Giurgiu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mărienut Uroș* (lic. Arad), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Menciu C-tin* (Brăila), *Popea G. Ovidiu* (lic. Chișinău), *Popovici Th. Ion*, *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Răuț C-tin* (lic M-rea Dealu), *Rothemberg Moses* (lic. Național, Iași), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solomon Nicu* (Timișoara), *Solomon Wilhelm* (lic. Matei-Basarab, București), *Stănciulescu George* (Pitești), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Vasilescu A. Mircea* lic. Giurgiu), *Vasiliu I.* (lic. M-rea Dealu), *Vlad Octavian* (Buzău), *Weiss Leon* (lic. Galați), *Wetter Ana* (lic. Câmpulung, Bucovina) și *Dumitrescu Gh. Marin.*

Cifra d fiind patrat perfect, nu poate fi decât: 0, 1, 4 sau 9. Numărul cd fiind patrat perfect, nu poate fi ținând seamă de d, de cât:

(1) 00, 01, 04, 09, 49, 64 sau 81,

deci cifra c n'ar putea fi decât: 0, 4, 6 sau 8.

Nu putem lua pentru c valoarea 8, fiindcă abc fiind patrat perfect. nu poate fi terminat cu 8.

Nu putem lua pentru c valoarea 0, pentrucă abc fiind format cu cifre consecutive, n'ar putea fi decât 120 sau 210, care nu's patrate perfecte.

Rezultă că din șirul (1) nu rămâne pentru cd decât: 49 sau 64, deci c este 4 sau 6.

Dacă luăm pentru c valoarea 4, pentru abc care e format cu cifre consecutive nu putem lua decât:

234, 324, 354, 534 564 sau 654,

însă dintre acestea numai 324 este patrat perfect:

$$324 = 18^2.$$

Dacă luăm pentru c valoarea 6, pentru abc care e format cu cifre consecutive nu putem lua decât:

456, 546, 576, 756, 786 sau 876,

însă dintre acestea numai 576 este patrat perfect:

$$576 = 24^2.$$

Rezultă că pentru abc n'am putea lua decât: 324 sau 576.

Ținând seamă că cd nu poate fi decât, 49 sau 64, rezultă că numărul nostru $abcd$ n'ar putea fi decât:

3249 sau 5764.

Dintre acestea însă numai primul este patrat perfect, urmează că singura soluție a problemei este,

$$3249 = 57^2.$$

228. — *Să se afle limita expresiunei:*

$$E = [1 + x - \log(1 - \sin x)]^{\frac{1}{x}}$$

pentru $x = 0$. *Să se dea o soluție fără a întrebuința derivatele.*

T Popovici.

Soluție dată de d-nii: *Adam I. Mircea* (lic. Constanța), *Bârglăzan N. Aurel* (lic. Sibiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Botiș Virgil* (lic. Arad), *Georgescu C. Ioan* (lic. Pitești), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Rigani Cr.* (Șc. Politechnică, București), *Stănciulescu George* (Pitești), *Solomon N.* (Timișoara), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani) și *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie).

Pentru $x = 0$, E ia forma nedeterminată 1^{∞} și pentru a ridica nedeterminarea facem x să tindă către zero.

Observăm însă întâi că putem scri:

$$E = \left\{ [1 + x - \log(1 - \sin x)]^{\frac{1}{x - \log(1 - \sin x)}} \right\}^{\frac{x - \log(1 - \sin x)}{x}}$$

Dacă facem acum ca x să tindă către zero, avem:

$$\lim_{x=0} E = e^{\lim_{x=0} \frac{x - \log(1 - \sin x)}{x}}$$

Dar,

$$\lim_{x=0} \frac{x - \log(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x=0} \left[1 - \lg (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

$$= 1 - \lim_{x=0} \log \left[(1 - \sin x)^{-\frac{1}{\sin x}} \right]^{-\frac{\sin x}{x}}$$

$$= 1 - \log e^{-1} = 1 + \log e = 2,$$

fiindcă simbolul log. însemnează logaritm neperian.

Atunci rezultă,

$$\lim_{x=0} E = e^2.$$

PROBLEME PROPUSE

269. — Ştiind că m, n, p sunt numere întregi, în ce caz expresiunea:

$$E = 111 (235^m + 233^n + 233^p) + 123$$

se divide cu 234?

FL. ER. GEORGESCU

270. — Să se arate că expresiunile,

$$976 \times 61^{n-1} + 2^{2n} \cdot 5^{n+2}$$

$$1207 \times 71^{n-1} + 2^{n+3} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n$$

$$1458 \times 81^{n-1} + 2^{3n} \cdot 5^n \cdot 23$$

sunt fiecare divizibile cu numărul 41.

EMIL ŞTEFANESCU

271. — Fie A B C un triunghiu oarecare şi M un punct mobil pe latura B C. Să se dovedească că cercurile descrise pe A M ca diametru, trec printr'un punct fix.

STANCULESCU I. C-TIN

272. — Fie A H înălţime a triunghiului A B C. Să se dovedească că suma razelor cercurilor înscrise în triunghiurile A B C, A B H şi A H C, este egală cu A H.

VASILIU ION

273. — Să se demonstreze că expresiunea:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2 (x^4 + y^4 + z^4),$$

este divizibilă prin $x + y + z$, şi să se afle câtul.

TR. LALESCU

274. — Se dau ecuaţiile,

$$x^2 + p x + q = 0$$

$$x^2 + p' x + q' = 0,$$

ale căror rădăcini sunt x_1, x_2 şi x'_1, x'_2.

Să se formeze ecuaţia

$$X^2 + PX + Q = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$X_1 = x_1 x'_1 + x_2 x'_2$$

$$X_2 = x_1 x'_2 + x_2 x'_1.$$

Când rădăcinele ecuaţiei în X sunt reale?

D V. IONESCU

275. — Pe latura fixă A B a patratului înscris în cercul dat O, se proectează coarda M N, în $M_1 N_1$. Se cere maximul sau minimul perimetrului trapezului $M N M_1 N_1$, când coarda M N de lungime egală cu raza cercului, variază ca poziţie, rămânând de o aceiaşi parte al lui A B.

V. ALACI

276. — Fie A B C un triunghiu oarecare, A' B' C triunghiul său ortic. Notăm cu A'', B'', C'' intersecţiile (A A', B' C'), (B B', A' C'), (C C', A' B'). Să se găsească expresiunile lungimelor A'A'', B'B'', C'C'' în funcţiune de unghiurile triunghiului A B C şi de raza cercului circumscris lui.

I. COSEREANU

INFORMATIUNI

Prospect

Organizarea şcoalei

Şcoala Politechnică din Timişoara cuprinde deocamdată două secţiuni:

a) Secţiunea de ingineri electro-mecanici;

b) Secţiunea de ingineri de mine şi metalurgie.

Alte secţiuni de specializare vor putea fi create în legătură cu nevoile locale sau cele generale ale ţării.

Invăţământul se întinde pe durata a patru ani de studii, după care studentul obţine diploma de inginer, în specialitatea pe care şi-a ales'o.

Pe lângă aceşti patru ani de studii mai există pe lângă şcoală diviziunea pregătitoare, destinată ca să dea studenţilor cari nu pot intra direct în şcoală pregătirea matematică necesară pentru începerea carierei technice. Durata studiilor în diviziunea pregătitoare este de un an.

Admiterea studenţilor

Admiterea şi matricularea studenţilor în anul I al şcolii se face pe baza unui examen de admitere ce se ţine la **8 Octombrie.**

Inscrierea la acest examen se face prin o cerere timbrată adresată Direcţiunei şcoalei şi însoţită de următoarele acte originale:

a) Actul de naştere;

b) Un certificat medical constatând că candidatul este de o constituţie sănătoasă;

c) una din următoarele diplome:

Diploma de absolvire a opt clase de liceu,

Diploma de absolvire a unei şcoli superioare de comerţ,

Diploma de absolvire a unei şcoli de conducători de lucrări publice,

Diploma de absolvire a unei şcoli superioare de arte şi meserii însoţită de certificatul de absolvire a patru clase secundare,

Diplomele altor şcoli străine vor trebui să fie echivalate de Ministerul Instrucţiunii.

Examenul de admitere are loc înscrîs şi oral în faţa unei comisiuni sub preşedenţia directorului şcoalei. Candidaţii care nu posedă bine limba română pot da examenul în oricare din limbile franceză, germană, maghiară indicând aceasta în cererea de înscriere.

Cererile de înscriere pentru examen se primesc la cancelaria şcolii până la 20 Septembrie cel mai târziu, cele pentru diviziunea pregătitoare până la 10 Octombrie.

Candidaţii reuşiţi la examen vor fi înmatriculaţi în anul I al şcolii în ordinea de merit după notele obţinute.

Candidaţii care nu vor reuşi la examen sau acei care nu sunt suficient pregătiţi pentru a se prezenta la examen se pot înscrie direct în diviziunea pregătitoare.

Studenţii altor şcoli Politechnice străine se pot înscrie în urma unui examen de diferenţă care va fi hotărît de consiliul profesoral.

Taxa

Taxele şcolare sunt următoarele:

200 lei taxa de frequenţă anual.

100 lei taxa de înscriere pentru examenul de admitere în şcoală.

Aceste taxe se achită înainte de închiderea înscrierilor adică de 20 Septembrie resp. 10 Octombrie. De aceste taxe nu poate fi scutit nimeni. Candidaţii care nu vor reuşi la examen şi voesc a se înscrie în diviziunea pregătitoare, vor avea de achitat taxa de frequenţă anuală de 200 lei.

Studenţii

Pe lângă Şcoala Politechnică există un cămin care asigură studenţilor burse sub formă pe întreţinere. La dispoziţia studenţilor se găseşte un dormitor unde însă fiecare trebue să-şi aducă rufele pentru pat şi o cantină unde iau masa.

Aceste burse se acordă în ordine de merit şi numai celor lipsiţi de mijloace. Pentru aceasta candidaţii vor adresa şcolii cererile lor, întovărăşite de un certificat vizat de percepţie din care să se constate situaţia materială a familiei.

Programul

cunoştinţelor cerute la examenul de admitere în anul I al şcoalei este publicat în *„Monitorul Oficial“*, No. 81, din 15 Iulie 1922.

I. *Geometria elementară:* Geometria plană. Geometria în spaţiu. Geometria Descriptivă.

II. *Mecanica elementară:* Statica. Elemente de Cinematică şi Dinamică.

III. *Algebra.*

IV. *Trigonometria.*

V. *Geometria Analitică.*

VI. *Fizica:* Gravitatea. Optica Geometrică. Acustica.

VII. *Chimia:* Chimia Anorganică.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 SEPTEMBRIE 1923. NO. 7

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PRETUL UNUI NUMAR 5 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. PROF. FILIP POP. ZONA SFERICA
2. I. STOENESCU. INSUMARI TRIGONOMETRICE
3. NOTE MATEMATICE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 80, 190, 200, 202, 210, 242.
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța că dela 15 August c. mai fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice următorii:

1, **Teodosiu Avram** Dr. în Matematici, Prof. la Academia de Agricultură și astronom la Universitate; **Arghir Iancu,** Prof. Tg.-Jiu; **Tino Ovidiu,** prof. lic. Șincai, București, str. Cornea 80; **Ghermănessu Mihail,** prof. lic. Cantemir, București, Roion 31.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL III. — No. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ZONA SFERICA

PROF. FILIP POP
Caransebeș

Dacă tăiem sfera prin două plane paralele obținem zona sferică, care se mai definește și ca un solid, ce se obține prin învârtirea unui arc de cerc în jurul unei axe fixe, de care arcul de cerc e legat la ambele capete prin două drepte paralele:

Intersecția celor două plane paralele ne dă cele două baze paralele ale zonei, cari sunt cercuri, iar distanța dintre aceste baze se numește înălțimea zonei.

Suprafața zonei e ușor de calculat, mai complicată este însă determinarea volumului acestei zone sferice. Această determinare se poate face lesne, cu ajutorul calculului integral, ceiace ne dă un exemplu că algebra și analiza nu complică ci simplifică chestiunile matematice.

In cele ce urmează — la sfatul d-lui prof. univ. Tr. Lalescu — voi trata nu un lucru nou, ci expunerea unei metode cunoscute dar simplificate pe care am întrebuințat-o și în lecțiile mele de liceu, metodă urmărită cu ușurință de elevi și preferată în locul demonstrațiilor geometrice.

După felul tăierii cu cele două plane paralele, avem 4 categorii de zone sferice:

I. Când un plan de secțiune trece prin centrul sferei;

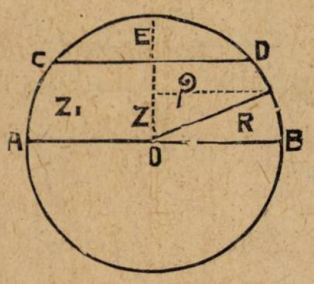
II. când un plan se află într'o emisferă iar celălalt în a doua;

III. când ambele plane sunt într'o emisferă și

IV. când unul dintre plane e tangent la sferă. (calota sferică).

CAZUL I.

Fie AB diametrul sferei prin care trece primul plan. Fie CD al doilea plan de secțiune OE = înălțimea zonei, z este dreapta pe care se măsoară înălțimea zonei ($OE = z_1$).



Ne închipuim că tăiem această zonă prin infinit de multe plane paralele cu AB și CD, așa de multe încât fiecare corp să ne dea câte un cilindru, a cărui volum este egal cu baza înmulțită cu înălțimea ($\rho^2 \pi . dz$).

Fiindcă cercurile de bază variază, iar acestea sunt în funcție de rază, numim raza variabilă cu ρ iar înălțimea infinit de mică cu dz (diferențială de z). Avem deci o diferențială de volum $dv = \rho^2 \pi\, dz$, iar suma tuturor volumelor, ne dă volumul zonei dintre O și z_1.

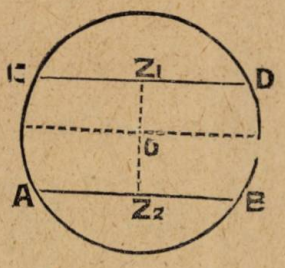
$$\int_0^{z_1} dv = \int_0^{z_1} \rho^2 \pi\, dz = \pi \int_0^{z_1} \rho^2\, dz \qquad (1)$$

Să exprimăm pe ρ^2 în funcție de raza sferei: $\rho^2 = R^2 - z^2$ pe care substituindu-l în (1) avem

$$\int_0^{z_1} dv = \pi \int_0^{z_1} (R^2 - z^2)\, dz = \pi \left[R^2 z_1 - \frac{z_1^3}{3} \right]$$

CAZUL AL II-lea

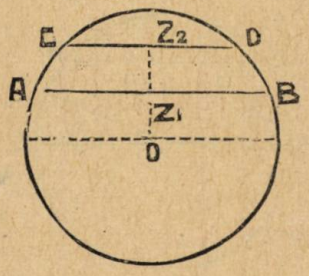
In cazul acesta ne folosim de cazul I și calculăm mai întâi zona dela O până la z_1, apoi pe cea dela O până la z_2 pe care apoi le adunăm ($z_1 + z_2 = h$ = înălțimea zonei).



$$V_z \text{ sf II} = \pi\left(R^2 h - \frac{z_2^3 + z_1^3}{3}\right)$$

Volumul zonei sferice, ce are bazele în ambele emisfere este egal cu volumul unui cilindru ce are ca bază un cerc mare al sferei și ca înălțime, înălțimea zonei, mai puțin suma sferturilor de volum ale sferelor ce ar avea ca rază distanțele bazelor de centrul sferei.

CAZUL AL III-lea



z_1 = distanța dela O până la z_1

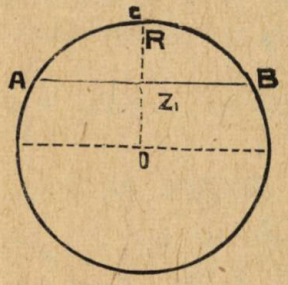
z_2 = distanța dela O până la z_2

deci $z_2 - z_1 = h$ = înălțimea zonei.

$$\int_{z_1}^{z_2} dv = \pi \int_{z_1}^{z_2} (R^2 - z^2)\, dz = \pi\left[R^2 z_2 - \frac{z_2^3}{3} - \left(R^2 z_1 - \frac{z_1^3}{3}\right)\right] = \pi\left(R^2 h - \frac{z_2^3 - z_1^3}{3}\right)$$

Volumul zonei când ambele ei baze sunt într'o emisferă este egal cu volumul unui cilindru ce are ca bază un cerc mare al sferei și ca înălțime, înălțimea zonei, mai puțin diferența dintre sferturile de volum ale celor două sfere ce au ca rază distanțele celor două baze de centrul sferei.

CAZUL AL IV-lea (calota sferică)



$$\int_{z_1}^{R} dv = \pi \int_{z_1}^{R} (R^2 - z^2)\, dz = \pi\left[R^2 . R - \frac{R^3}{3} - \left(R^2 z_1 - \frac{z_1^3}{3}\right)\right] = \pi\left(R^2 h - \frac{R^3 - z_1^3}{3}\right)$$

fiindcă $R - z_1 = h$.

Această formulă se obține imediat din cea din cazul III, observând că în cazul calotei sferice $z_2 = R$.

Ca o verificare la cazul IV facem pe $z_1 = 0$, când calota este o emisferă

$$V = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2\pi R^3}{3}$$

care este tocmai volumul emisferei știut din geometrie.

INSUMARI TRIGONOMETRICE

I. STOENESCU
Lic. „Cantemir" Buc.

In R. M. T., an. II, No. 5, pag. 67, d. V. Alaci, efectuiază câteva însumări trigonometrice și termină cu observațiunea că aceste însumări pot fi generalizate. Acest lucru îl voi îndeplini în prezentul articol, în cele ce urmează.

Fie de calculat:

$$(1) \qquad S = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{v_k}{w_n}$$

în care:

$$u_k = \pi \sum_{i=0}^{m} A_i\, k^{m-i}, \quad v_k = \pi \sum_{i=0}^{m} B_i\, k^{m-i},$$

$$w_n = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i\, n^{m-i}$$

știind că:

$$(2) \qquad u_{k+a} - v_{k+a} \equiv u_k + v_k$$

Avem evident:

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{u_k - v_k}{w_n} - \frac{u_k + v_k}{w_n}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \left[\sum_{k=1}^{a} \cos \frac{u_k - v_k}{w_n} + \sum_{k=a+1}^{n} \cos \frac{u_k - v_k}{w_n} -\right.$$

$$\sum_{k=1}^{n-a} \cos \frac{u_k + v_k}{w_n} - \sum_{k=n-a+1}^{n} \cos \frac{u_k + v_k}{w_n}\Bigg]$$

Ţinând însă seama de (2) deducem:

$$\sum_{k=a+1}^{n} \cos \frac{u_k - v_k}{w_n} - \sum_{k=1}^{n-a} \cos \frac{u_k + v_k}{w_n} \equiv 0$$

de oarece termenii se reduc doi câte doi, şi cum:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{a} \cos \frac{u_k - v_k}{w_n} = a$$

pentrucă fiecare din cei a termeni pentru $n = \infty$, tinde către $\cos 0 = 1$, iar:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=n-a+1}^{n} \cos \frac{u_k + v_k}{w_n} = a \cos \frac{(A_0 + B_0)\pi}{\alpha_0}$$

pentrucă:

$$\lim_{n=\infty} \cos \frac{\pi \sum_{i=0}^{m} A_i (n-p)^{m-i} + \pi \sum_{i=0}^{m} B_i (n-p)^{m-i}}{\sum_{i=0}^{m} \alpha_i n^{m-i}}$$

$$= \cos \frac{(A_0 + B_0)\pi}{\alpha_0}$$

$$p = (a-1),\ (a-2), \ldots,\ 0$$

obţinem din (3):

$$(4) \qquad S = \frac{a}{2}\left[1 - \cos \frac{(A_0 + B_0)}{\alpha_0}\pi\right]$$

$$= a \sin^2 \frac{(A_0 + B_0)\pi}{2\alpha_0}$$

Insumarea este făcută. Ne mai rămâne a studia urmările relaţiei (2).

Inlocuind în această relaţie pe u_{k+a}, v_{k+a}, u_k, v_k prin valorile lor şi simplificând cu π găsim:

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{m} (A_i - B_i)(k+a)^{m-i} \equiv \sum_{i=0}^{m} (A_i + B_i) k^{m-i}$$

Insă:

$$\sum_{i=0}^{m} (A_i - B_i)(k+a)^{m-i}$$

$$= (A_0 - B_0)(k^m + C_m^1 a k^{m-1} + C_m^2 a^2 k^{m-2} +$$

$$C_m^3 a^3 k^{m-3} + \ldots + C_m^m a^m) + (A_1 - B_1)(k^{m-1} +$$

$$C_{m-1}^1 a k^{m-2} + C_{m-1}^2 a^2 k^{m-3} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} a^{m-1})$$

$$+ (A_2 - B_2)(k^{m-2} + C_{m-2}^1 a k^{m-3} + C_{m-2}^2 a^2 k^{m-4}$$

$$+ \ldots + C_{m-2}^{m-2} a^{m-2} + \ldots + (A_m - B_m) =$$

$$(A_0 - B_0) k^m + [(A_0 - B_0) C_m^1 a + (A_1 - B_1)] k^{m-1} +$$

$$[(A_0 - B_0) C_m^2 a^2 + (A_1 - B_1) C_{m-1}^1 a + (A_2 - B_2)] k^{m-2}$$

$$+ [(A_0 - B_0) C_m^3 a^3 + (A_1 - B_1) C_{m-1}^2 a^2 +$$

$$(A_2 - B_2) C_{m-2}^1 a + (A_3 - B_3)] k^{m-3} +$$

. . . . . .

$$+ [(A_0 - B_0) C_m^m a^m + (A_1 - B_1) C_{m-1}^{m-1} a^{m-1} +$$

$$(A_2 - B_2) C_{m-2}^{m-2} a^{m-2} + \ldots + (A_m - B_m)]$$

$$= \sum_{i=0}^{m} [(A_0 - B_0) C_m^i a^i + (A_1 - B_1) C_{m-1}^{i-1} a^{i-1}$$

$$+ \ldots + (A_i - B_i)] k^{m-i} \quad (*)$$

Substituind această valoare în (5) şi identificând obţinem:

$$(6) \quad (A_0 - B_0) C_m^i a^i + (A_1 - B_1) C_{m-1}^{i-1} a^{i-1}$$

$$+ \ldots + (A_i - B_i) = A_i + B_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m)$$

Pentru $i = 0$ şi $i = 1$ căpătăm:

$$A_0 - B_0 = A_0 + B_0$$

$$(A_9 - B_0) C_m^1 a + (A_1 - B_1) = A_1 + B_1$$

De unde, rezultă:

$$B_0 = 0 \qquad a = \frac{2B_1}{m A_0}$$

Introducând aceste valori în (4) avem:

$$(7) \qquad S = \frac{2B_1}{m A_0} \sin^2 \frac{A_0}{2\alpha_0}\pi$$

Observăm, că dacă polinomul u_k este dat „sistemul (6) ne permite calcularea valorilor B_i şi deci aflarea lui v_k.

(*) A se ţine seamă că în această sumă, C_i^0 reprezintă 1 şi C_i^{-q} va fi înlocuit cu 0.

Se remarcă uşor că singura cantitate ce poate lua valori după voe este sau B_1 sau a.

Aplicaţie. Să considerăm $m = 2$. Din (6) se obţin trei egalităţi care dau:

$$B_0 = 0,\ B_1 = a A_0,\ B_2 = \frac{1}{2} a A_1$$

Având în vedere (7) deducem:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{(A_0 k^2 + A_1 k + A_2)\pi}{\alpha_0 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_2} \sin \frac{\left(a A_0 k + \frac{1}{2} a A_1\right)\pi}{\alpha_0 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_2}$$

$$= a \sin^2 \frac{A_0}{2\alpha_0} \pi.$$

(A se vedea § 4, din articolul d-lui V. Alaci).

2. Fie de calculat:

$$S_1 = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{v_k}{w_n} \cos \frac{\varphi_1 v_k}{w_n}$$

în care φ_1, este o constantă.

Ţinând seama că:

$$\sin \frac{v_k}{w_n} \cos \frac{\varphi_1 v_k}{w_n} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(1+\varphi_1) v_k}{w_n} + \sin \frac{(1-\varphi_2) v_k}{w_n} \right]$$

putem scrie:

$$S_1 = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{(1+\varphi_1) v_k}{w_n} +$$

$$\frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{(1-\varphi_1) v_k}{w_n}$$

Aceste amândouă limite însă sunt cuprinse în (1) de oarece au absolut aceiaşi formă cu (1), cu singura deosebire că coeficienţii lui v_k sunt înmulţiţi respectiv cu constantele $(1+\varphi_1)$ şi $(1-\varphi_1)$.

Inlocuind succesiv pe B_1 prin $(1+\varphi_1) B_1$ şi $(1-\varphi_1) B_1$ din (7) deducem:

$$S_1 = \frac{(1+\varphi_1) B_1}{m A_0} \sin^2 \frac{A_0}{2\alpha_0} \pi + \frac{(1-\varphi_1) B_1}{m A_0} \sin^2 \frac{A_0}{2\alpha_0} \pi$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad S_1 = \frac{2 B_1}{m A_0} \sin^2 \frac{A_0}{2\alpha_0} \pi = S$$

Analog se stabileşte:

$$S_2 = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{v_k}{w_n} \cos \frac{\varphi_1 v_k}{w_n} \cos \frac{\varphi_2 v_k}{w_n}$$

$$= \frac{2 B_1}{m A_0} \sin^2 \frac{A_0}{2\alpha_0} \pi$$

Urmărind această problemă din aproape în aproape pe cale inductivă, absolut identică cu cea dată de d. V. Alaci se obţine remarcabila însumare:

$$\lim_{n=\infty} \sum \left(\sin \frac{u_k}{w_n} \sin \frac{v_k}{w_n} \prod_{i=1}^{p} \cos \frac{\varphi_i v_k}{w_n} \right)$$

$$= \frac{2 B_1}{m A_0} \sin^2 \frac{A_0}{2\alpha_0} \pi$$

NOTE MATEMATICE

Asupra triunghiurilor în care avem:

$$(1) \qquad a = \frac{b^2 + c^2}{b + c}$$

Imi propun a găsi câteva relaţiuni între elementele unui triunghiu în care există relaţia de sus.

1. Se punem în (1)

$$a = \frac{2s}{h_a},\ b = \frac{2s}{h_b},\ c = \frac{2s}{h_c}$$

vom avea

$$\frac{2s}{h_a} = \frac{4 s^2 \left[\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right]}{2 s \left[\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right]}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \frac{1}{h_a} = \frac{h_b^2 + h_c^2}{h_b h_c (h_b + h_c)} \qquad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \frac{h_b h_c}{h_a} = \frac{h_b^2 + h_c^2}{h_b + h_c}$$

2. Luăm egalităţile

$$2p = a + b + c,\ 2(p-a) = b + c - a,$$

$$2(p-b) = a + c - b,\ 2(p-c) = a + b - c$$

ținând seamă de (1), vom avea

$$2p = \frac{b^2+c^2}{b+c} + b + c = \frac{2(b^2+c^2+bc)}{b+c}$$

$$\overset{*}{**} \quad (2) \quad p = \frac{b^2+c^2+bc}{b+c}$$

$$2(p-a) = b + c - \frac{b^2+c^2}{b+c} = \frac{2bc}{b+c}$$

$$\overset{*}{**} \quad (3) \quad p - a = \frac{bc}{b+c}$$

$$2(p-b) = \frac{b^2+c^2}{b+c} + c - b = \frac{2c^2}{b+c}$$

$$\overset{*}{**} \quad (4) \quad p - b = \frac{c^2}{b+c}$$

$$2(p-c) = \frac{b^2+c^2}{b+c} - c + b = \frac{2b^2}{b+c}$$

$$\overset{*}{**} \quad (5) \quad p - c = \frac{b^2}{b+c}$$

din relațiunile (3), (4) și (5) deducem

$$(6) \qquad (p-a)^2 = (p-b)(p-c)$$

3. Avem relațiunile

$$p - a = \frac{S}{r_a}, \quad p - b = \frac{S}{r_b}, \quad p - c = \frac{S}{r_c}$$

punând aceasta în (6) avem

$$\frac{S^2}{r_a^2} = \frac{S^2}{r_b r_c} \qquad \overset{*}{**} \quad (6) \quad r_a^2 = r_b r_c$$

adică raza cercului exînscris corespunzător laturei a este medie proporțională între celelalte două raze similare.

4. Avem relațiunea:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ținând seama de (2), (3), (4) și (5) aceasta devine:

$$S = \frac{bc}{b+c}\sqrt{\frac{bc}{b+c}\left(\frac{b^2+c^2+bc}{b+c}\right)}$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}\sqrt{bc(b^2+c^2+bc)}$$

aceasta este suprafața în funcție numai de laturile b și c. O formă mai simetrică a ei este:

$$(8) \qquad S = (p-a)\sqrt{p(p-a)}$$

5. Din relația:

$$r = \frac{S}{p} \quad \text{avem:} \quad (9) \quad r = \frac{(p-a)\sqrt{p(p-a)}}{p}$$

$$= (p-a)\sqrt{\frac{(p-a)}{p}}$$

6. Avem relațiunea:

$$(10) \qquad r_a r_b r_c = S p,$$

ținând seama de (7) și (8) avem

$$(11) \qquad r_a^3 = p(p-a)\sqrt{p(p-a)}$$

$$\overset{*}{**} \quad r_a = \sqrt{p(p-a)}$$

7. Mai putem exprima pe S în funcție de r_a și p. Din (10) și (11)

$$S = \frac{r_a^3}{p}$$

Putem stabili și relațiuni unghiulare.

8. Punem:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C$$

în (1), avem:

$$\sin A = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B + \sin C}$$

$$\overset{*}{**} \quad (12) \quad \sin A(\sin B + \sin C) = \sin^2 B + \sin^2 C$$

avem însă

$$h_b = \frac{b \sin A \sin C}{\sin B}, \quad h_c = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}$$

$$\overset{*}{**} \quad \sin A \sin C = \frac{h_b \sin B}{b}, \quad \sin A \sin B = \frac{h_c \sin C}{c}$$

sau ținând seamă de formulele

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{și} \quad h_b = \frac{2s}{b}, \quad h_c = \frac{2s}{c}$$

avem:

$$\sin A \sin C = \frac{2s}{b} \cdot \frac{\sin A}{a}, \quad \sin A \sin B = \frac{2s}{c} \cdot \frac{\sin A}{a}$$

adică relația (12) devine

$$\sin A \sin B + \sin A \sin C =$$

$$\frac{2s \sin A}{a}(b+c) = \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$\overset{*}{**} \quad h_a (b+c) = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin A}$$

sau

$$\frac{b+c}{bc} = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C}{h_a \sin A}$$

9. Din relația (7), deducem ținând seamă că

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \text{ și } \cot^2 \frac{A}{2} = \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

Din aceasta din urmă și din

$$\Sigma \cot \frac{A}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

deducem

$$\Sigma \cot \frac{A}{2} = \cot^3 \frac{A}{2}$$

Se mai pot stabili și alte relațiuni însă sunt mai complicate. Se mai pot stabili și relațiuni între distanțele a două puncte remarcabile din triunghiu dintre care unele sunt interesante așa de exemplu dacă I este centrul cercului înscris știm că avem:

$$\overline{AI_b}^2 = \frac{(p-c)bc}{p-b}, \quad \overline{AI_c}^2 = \frac{(p-b)bc}{p-c}$$

și ținând seamă de (4) și (5), avem:

$$\overline{AI_b}^2 = \frac{b^3}{c}, \quad \overline{AI_c}^2 = \frac{c^3}{b}$$

TIBERIU POPOVICI.
cl. VII R. (lic. Arad)

PROBLEME REZOLVATE

80. — *Se dau două cercuri* O_1 *și* O_2 *secante în* A *și* B. *Prin* A *se duce o secantă mobilă* $C_1 A C_2$, $C_2 B$ *și* $C_1 B$ *tae cercurile a doua oară în* D_1 *și* D_2. *Perpendicularele scoborîte din* D_1 *și* D_2 *pe secanta dată tae această secantă în* M *și* N, *iar cercurile în* P_1 *și* P_2. *Să se afle locul punctelor* M *și* N *când secanta se rotește în jurul lui* A.

Să se determine poziția acestor locuri în raport cu fiecare din cercurile date. Să se demonstreze că există relația;

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (R_1 \text{ și } R_2 \text{ razele cercurilor}).$$

Să se deducă că punctele O_1, O_2, P_1, P_2 *sunt pe un același cerc,*

Caz particular, când cele două cercuri sunt ortogonale.

AUG. COMAN

Soluțiuni date de d-nii: *Georgescu Roegen* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad). *Scodrano Alexandru* (Durostor) și *Ulman Octav* (Șc. Politechnică).

1. Pe figură se vede ușor:

$$\sphericalangle A C_1 B = \sphericalangle A O_1 O_2 = \text{const.},$$

$$\sphericalangle C_1 D_2 P_2 = 90^0 - \overset{\frown}{A C_1 B} = \text{const.}$$

Deci dreapta $D_2 M$ trece printr'un punct fix P_2 de pe cercul O_2.

Ținând seamă că $\sphericalangle A M P_2 = 90^0$, deducem că M descrie un cerc pe AP_2 ca diametru. Acum să determinăm poziția punctului P_2. Ducem diametrul $A O_2 A_2$ și obținem

$$\text{arc } D_2 A_2 = \text{arc } C_2 P_2$$

dreptele $D_2 P_2$ și $A_2 C_2$ fiind perpendiculare pe $A C_2$, deci rezultă

$$(1) \qquad \sphericalangle P_2 A C_2 = \sphericalangle D_2 A A_2.$$

Apoi observăm că triunghiurile $A C_1 D_2$ și $A O_1 O_2$ au $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle O_1$, $\sphericalangle D_2 = \sphericalangle O_2$, rezultă că,

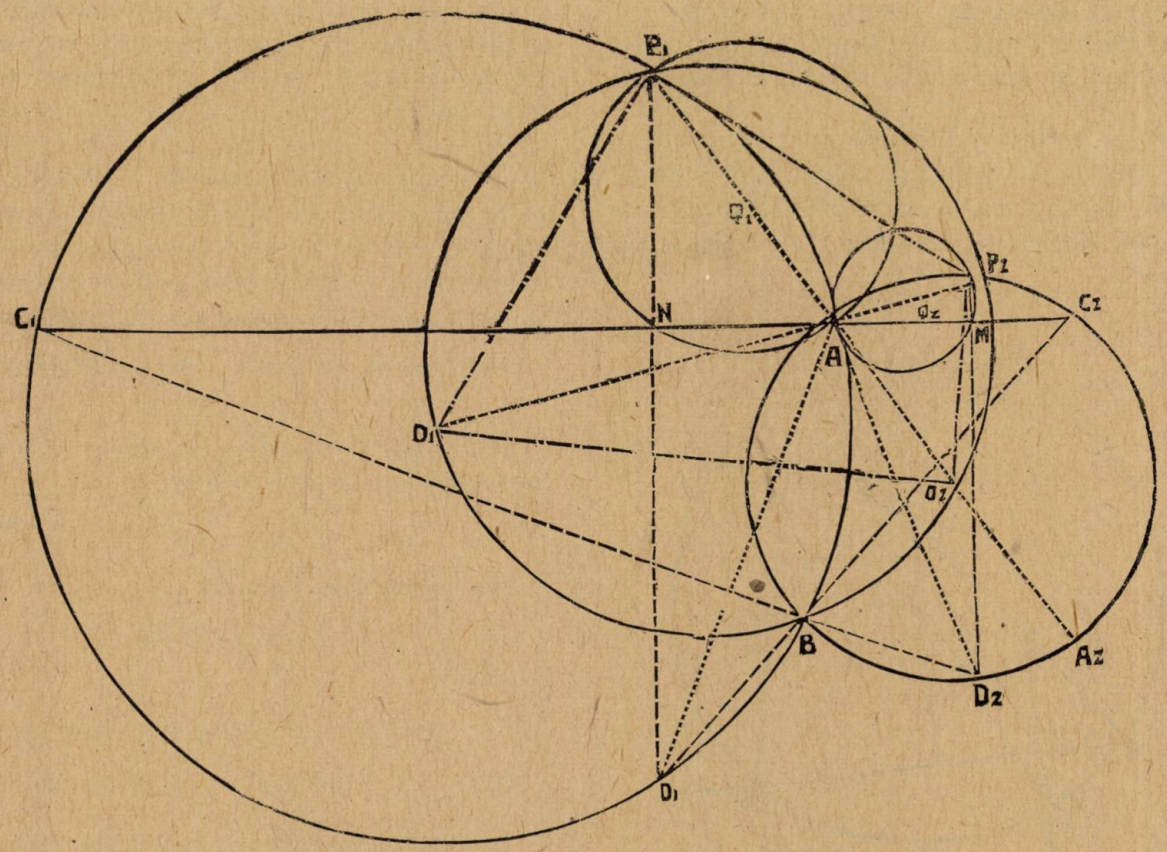
$$\sphericalangle C_1 A D_2 = \sphericalangle O_1 A O_2,$$

deci și:

$$(2) \qquad \sphericalangle C_1 A O_1 = \sphericalangle D_2 A A_2.$$

Privind relațiile (1) și (2), deducem,

$$\sphericalangle C_1 A O_1 = \sphericalangle P_2 A C_2$$



adică diametrul AP_2 este prelungirea razei O_1A şi deci cercul AMP_2 este tangent cercului O.

Locul punctului M *este astfel un cerc descris pe* AP_2 *ca diametru şi care este tangent cercului* O_1 *în* A.

La fel se determină şi locul punctului N *care este cercul descris pe* AP_1 *ca diametru tangent cercului* O_2 *în* A.

2. Triunghiurile isoscele AO_1P_1 şi AO_2P_2 având $\sphericalangle O_1AP_1 = \sphericalangle O_2AP_2$ sunt asemenea, de unde rezultă:

$$\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{3}$$

3. Din egalitatea (3) deducem că O_1P_2 şi O_2P_1 sunt antiparalele faţă de laturile unghiului format de O_1P_1, O_2P_2, deci patrulaterul $O_1O_2P_2P_1$ este inscriptibil.

4. In cazul cercurilor ortogonale P_1, P_2 se confundă cu A unde se confundă şi M, N. Deci în acest caz dreptele D_2M şi D_1N trec prin A.

Soluţiuni parţiale date de d-nii: *Focşeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Pârâianu N.* (Piteşti) şi *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina).

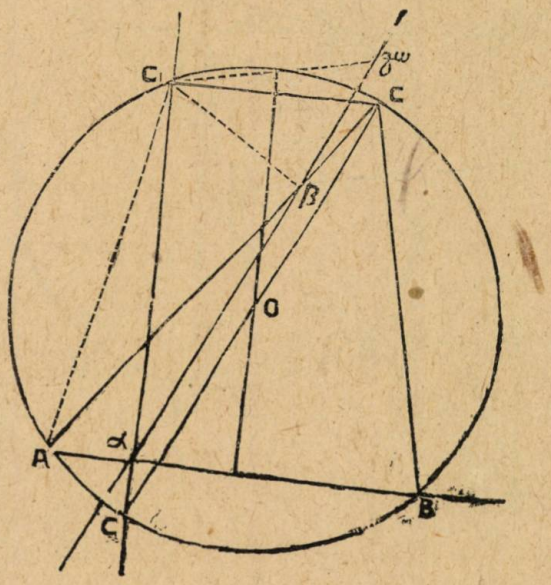
190. — *Să se demonstreze că dreptele lui Simson ale punctelor de pe cercul circumscris, simetrice vârfurilor faţă de mediatoarele triunghiului, sunt paralele cu diametrele acelor vârfuri.*

TR. LALESCU

Soluţie date de d-nii: *Atanasiu D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Berdan C.* (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Sc. Politechnică, Timişoara), *Buşilă Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Coşereanu Ion* (Timişoara), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Gheorghiu Gh. Lucian* (lic. Naţional, Iaşi), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Lăzărescu Fl. Şt.* (lic. Giurgiu), *Lelescu Luciliu* (lic. M-rea Dealu), *Mateescu G.* (lic. Galaţi), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Niculescu Alexandru* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Popovici Th. Ion* (lic. Mi-

hai-Viteazul, Bucureşti), *Scodrano Alexandru* (Silistra), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Solomon Weiss* (lic. Galaţi), şi *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani),

Fie $\alpha\beta\gamma$ dreapta lui *Simson* a lui C_1. simetric, cu C faţă de mediatoarea laturei AB a triunghiului ABC înscris în cercul dat O. Să dovedim că ea este paralelă cu diametrul CC'. Unim C_1 cu



cu C', C_1C' este perpendiculară pe C_1C, deci şi pe paralela sa AB, astfel că C' este intersecţia cu cercul a proectantei lui C, pe AB. In virtutea unei proprietăţi cunoscute (Articolul *„Dreapta lui Simson"* a d-lui profesor *Lalescu* din „R. M. T." anul II, No. 10), rezultă că dreapta lui *Simson* $\alpha\beta\gamma$ este paralelă cu CC', care în cazul nostru este diametrul vârfului C.

Demonstraţie analoagă pentru celelalte drepte ale lui *Simson*

Soluţiuni date de d-nii: *Crăiniceanu Gh.* (student Cluj), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Goldemberg I.* (lic. Galaţi), *Goldstein I. M.* (Bârlad), *Katz Pincu* (Galaţi), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Miclescu Andrei* (Timişoara), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Röder O. C.* (Bârlad), *Scodrano Alexandru* (Silistra), *Septelici Raul* (Şc. de Artilerie) *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Zuckermann M, B.* (Bârlad).

Observăm întâi ca mai sus, că extremitatea C' a diametrului CC' este intersecţia cu cercul a proectantei lui C_1 pe AB. Patrulaterul $AC_1\beta\gamma$ fiind inscriptibil ($\sphericalangle\beta = \sphericalangle\alpha = 90^0$), rezultă că $\sphericalangle AC_1\alpha = \sphericalangle A\beta\alpha$; dar $\sphericalangle AC_1\alpha = \sphericalangle ACC'$ având aceiaşi măsură, rezultă că $\sphericalangle A\beta\alpha = \sphericalangle ACC'$ şi având poziţia de alterne-interne, urmează că $\alpha\beta\gamma$ este paralelă cu CC'. Analog pentru celelalte drepte *Simson*. Aceasta este de fapt şi demonstraţia dată în articolul menţionat, în prima soluţie.

D-l *Gheorghiu Gh. Luciliu*, a dat şi o soluţie analitică.

200. — *Dacă* $x+y+z=0$, *atunci* $x^7+y^7+z^7$ *este divizibil cu* $x^3+y^3+z^3$.

V. ALACI

Din relaţia dată deducem:

$$z = -(x+y),$$

şi atunci:

$$(1) \qquad x^7+y^7+z^7 = x^7+y^7-(x+y)^7$$

$$(2) \quad x^3+y^3+z^3 = x^3+y^3-(x+y)^3 = -3xy(x+y)$$

E destul să dovedim că expresiunea (1), se divide cu factorii literali din (2).

Observăm că pentru $x=0$, $y=0$, $x=-y$ expresiunea:

$$x^7+y^7-(x+y)^7$$

se anulează, ceiace dovedeşte că ea să divide cu x, y, $x+y$ şi deci şi cu produsul lor: ceiace era de dovedit.

Observare. Demonstraţia se menţine întocmai şi în cazul mai general, când înlocuim, în enunţ: „$x^7+y^7+z^7$" prin „$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}$".

D-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C-tin* (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Goldstein I. M.* (Bârlad), *Katz Pincu* (Galaţi), *Musta St.* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Negretzu Florea* (lic. Piteşti), *Oprişanu Ernest*, *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Röder Carol* (Bârlad), *Solacu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Stratulat Ion* (Şc. Politechnică, Timişoara),

Zuckermann Bernard (Bârlad), au soluționat problema, utilizând binomul lui *Newton*, scriind expresia (1), succesiv:

$$x^7+y^7-(x+y)^7=-7xy[x^5+y^5+3xy(x^3+y^3)$$

$$+5x^3y^3(x+y)]=-7xy(x+y)(x^4+2x^3y$$

$$+3x^2y^2+2xy^3+y^4)=-$$

$$7xy(x+y)(x^2+y^2+xy)^2,$$

care pune în evidență factorii literali din (2).
Alte soluțiuni date de d-nii: *Grofșorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Solacolu Mircea* (lic. Spiru-Haret, București) și *Stambuleanu Adrian* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara).

Observări. 1. D-nii: *Adam M.* (Constanța), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Rigani Cr.* (Șc. Politechnică, București) și *Weiss Leon* (lic. Galați), au arătat că în „Culegere de Probleme", Ed. II, Cap. III, No. 42, se demonstrează că;

„Expresiunea: $(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$, este divizibilă prin, $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$", și dacă facem:

$$x+y+z=0 \quad \text{și} \quad n=3$$

se găsește problema propusă.

2. D-nii: *Coșereanu Ion* (Timișoara), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Rigani Cr.* (Șc. Politechnică, București), se referă la nota 36 din „Gazeta Matematică", anul XXVIII, a d-lui *V. Cristescu.*

3. D-l *Rigani Cr.* observă că problema e generalizată în Nota 56 din „G. M.". anul XXVIII, de d-l M. Ghermănescu.

Demonstrația întrebuințată mai sus, pentru cazul general, e mai simplă, nefolosind binomul lui *Newton.*

202. — *Să se determine p și q, astfel ca expresiunea:*

$$\frac{x^2+px+q}{x+1}$$

să aibă un minim egal cu 1 pentru $x=1$. *(Se cere o soluție și fără ajutorul derivatelor).*

N. ABRAMESCU

Fie:

$$(1)\quad y=\frac{x^2+px+q}{x+1}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad x^2-(y-p)x-y+q=0.$$

Rezolvind în raport cu x, găsim:

$$x=\frac{y-p\pm\sqrt{(y-p)^2+4y-4q}}{2}$$

Pentru ca x să fie real, trebue ca:

$$(y-p)^2+4y-4q\geqq 0$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad (2)\quad y^2-2(p-2)y+p^2-4q\geqq 0$$

Rădăcinele trinomului din (2), sunt:

$$y_1=p-2-2\sqrt{1-p+q} \quad \text{și}$$

$$y_2=p-2+2\sqrt{1-p+q}$$

Dacă am impune condiția:

$$1-p+q\leqq 0$$

inegalitatea (2) ar fi satisfăcută pentru orice valoare reală a lui y, dar în acest caz nu putem deduce pentru y, o valoare minimă, finită.

Dacă:

$$(3)\qquad 1-p+q>0$$

atunci (2) e satisfăcută numai pentru:

$$y\leqq y_1 \quad \text{sau} \quad y\geqq y_2.$$

Se vede că:

$$y=y_2=p-2+2\sqrt{1-p+q}$$

este valoarea minimă finită pentru y.

Conform enunțului:

$$p-2+2\sqrt{1-p+q}=1$$

și ținând seamă că pentru $x=1$, avem $y=1$, deducem din (1) și:

$$p+q=1.$$

Atunci sistemul:

$$(4)\quad \begin{cases} p+q=1 \\ p-2+2\sqrt{1-p+q}=1, \end{cases}$$

determină pe p și q în condițiile cerute de enunț.

Ecuația doua ținând seamă de prima, devine:

$$2\sqrt{2q}=q+2$$

$$q^2-4q+4=(q-2)^2=0.$$

Rezultă atunci:

$$\begin{cases} q=2 \\ p=-1. \end{cases}$$

care sunt valorile lui p și q, pentru care expresie dată admite un minim egal cu 1, pentru $x=1$.

Altă soluție. Putem trata problema, folosind cunoștințele în care intervine derivata.

Derivata funcțiunei este:

$$y'=\frac{x^2+2x+p-q}{(x+1)^2}$$

Știm că maximul sau minimul funcțiunei are loc pentru valorile variabilei, care anulează derivata: și anume avem maxim dacă derivata trece dela pozitiv la negativ și minim în caz contrar.

Rădăcinele derivate sunt:

$$x_1=-1-\sqrt{1-p+q} \text{ și } x_2=-1+\sqrt{1-p+q}$$

Condiția,

$$1-p+q>0$$

presupunând'o împlinită, următorul tablou de variație:

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{1-p+q}$	$-1+\sqrt{1-p+q}$	$+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	crește	Max.	descrește	Min.	crește

ne spune că y e minim pentru:

$$x=-1+\sqrt{1-p+q}$$

și cum acest minim trebue să aibă loc pentru $x=1$, trebuie ca:

$$-1+\sqrt{1-p+q}=1 \text{ sau } q-p=3.$$

Ținând seamă încă că pentru $x=1$, $y=1$, din (1) deducem:

$$p+q=1$$

Atunci sistemul:

$$\begin{cases} p+q=1 \\ q-p=3 \end{cases}$$

ne dă:

$$\begin{cases} p=-1 \\ q=2 \end{cases}$$

Avem astfel valorile lui p și q, pentru care expresiunea dată admite un minim egal cu 1, pentru $x=1$.

Au dat ambele soluțiuni, d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bârglăzan A.* (lic. Sibiu), *Bobârnac C. Mircea* (Sc. Politechnică, Timișoara), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Ciolacu St. Miron* (Caracal), *Cocorandu Mircea* (Brașov), *Camerzan Octavian* (Sc. de Geniu), *Cotea Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Crețoiu A.* (lic. Cantemir, București), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Georgescu P. C.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghiu Gh. Lucian* (lic. Național, Iași), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Herscovici Em.* (lic. Galați), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (lic. Giurgiu), *Măcrineanu Sterian* (Galați), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Negretzu Florea* (lic. Pitești), *Niculescu Alexandru* (lic Matei-Basarab), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Stamatiu Mihail* (Pitești), și *Weiss Leon* (lic. Galați).

Au dat numai prima soluțiune, d-l: *Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal).

Au dat numai soluția a (2), d-nii: *Katz Pincu* (Galați), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iași), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu) și *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul București).

210. — *Dacă numărul k este pozitiv sau nul, să se arate că ecuația:*

$$k^2x^2+[k+n(k+1)]x+n=0,$$

are rădăcini reale, oricare ar fi n real.

TH. ANGHELUTA

Prima soluție dată de d-nii: *Branover Lev* (Șc. Politechnică, Timișoara), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Ghidalisohn I.* (lic. Galați), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Grünberg S. Herman* (lic. Galați), *Herscovici Emanoil*, *Mateescu G.* (lic. Galați), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Musta Ștefan* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Popovici Chr. Ion* (lic. Galați), *Rubinstein Martin* (lic. Galați), *Stoenescu C. Ioan* (lic. Galați) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

Realizantul ecuației date se poate scrie succesiv:

$$R = (k + n\,k + n)^2 - 4\,n\,k^2 = k^2 + n^2 k^2 +$$

$$n^2 - 2\,n\,k^2 + 2\,n\,k + 2\,n^2 k = (k - n\,k + n)^2 + 4\,n^2 k$$

Pentru $k = 0$ sau $k = \geqq 0$, această expresie este pozitivă, oricare ar fi n real, urmează că rădăcinele ecuației date sunt reale în condițiile enunțului.

A doua soluție, dată de d-nii: *Bobârnac M* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Cotea Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Cristea Gh. Aurel* (lic. Focșani), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iași), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei-Basarab, București) și *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani).

Realizantul ecuației este:

$$R = [k + n\,(k + 1)]^2 - 4\,k^2\,n =$$

$$n^2\,(k + 1)^2 - 2\,n\,k\,(k - 1) + k^2.$$

Rădăcinele acestui trinom sunt:

$$n = \frac{k\,(k - 1) \pm k\sqrt{-4\,k}}{(k + 1)^2}$$

deci sunt imaginare pentru $k > 0$. Pentru $k = 0$, sau $k > 0$,

$$n^2\,(k + 1)^2 - 2\,n\,k\,(k - 1) + k^2 > 0,$$

deci ecuația dată are rădăcini reale, oricare ar fi n real și $k \geqq 0$.

Observare. Multe soluțiuni au fost înlăturate, fiind greșite.

242. — *Să se determine pe diagonala* A C *a patruterului* A B C D *un punct* P, *astfel ca ducând paralele* P M *și* P N *respectiv la* B C *și* A D, M *fiind pe* A B *și* N *pe* D C, *să avem:*

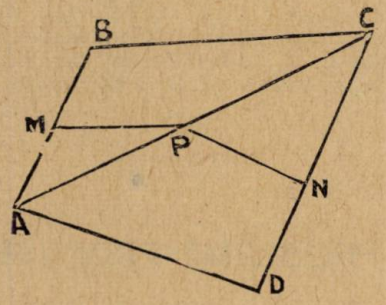
$$PM \times AD = PN \times BC.$$

EMIL STEFANESCU

Relația dată o putem scrie:

$$(1) \qquad \frac{PM}{BC} = \frac{PN}{AD}$$

Apoi P M fiind paralelă cu B C, triunghiurile A M P și A B C sunt asemenea și deci:



$$(2) \qquad \frac{PM}{BC} = \frac{AP}{AC}$$

P N fiind paralelă cu A D, triunghiurile C P N și C A D sunt și ele asemenea, și deci:

$$(3) \qquad \frac{PN}{AD} = \frac{PC}{AC}$$

Privind relațiunile (2) și (3), observăm că primii membri sunt egali în virtutea relațiunei date (1), rezultă atunci:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{PC}{AC}$$

Numitorii fiind egali, urmează că și numărătorii sunt egali, adică

$$AP = PC,$$

ceiace ne spune că punctul P este mijlocul diagonalei A C.

Soluțiuni analoage date de d-nii: *Bârglăzan Aurel* (lic. Sibiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Timișoara),

Brodschi I. (lic. Cetatea-Albă), *Ciută Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Cocorandu M.* (lic. Braşov), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Cosereanu Ion* (Timişoara), *Creţaiu A.* (Bucureşti), *Drageanu N. Niculae* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Dobre V.* (Cond. de Lucrări Publice), *Dumitrescu Alexandru* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Dumitrescu C. Nicolae* (lic. Piteşti), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Freier Em.* (lic. Focşani), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val* (Timişoara), *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Grofşorean I. Gheorghe*, *Grigorescu Ion* (M-rea Dealu), *Harnagea Iorguţă* (lic. Huşi), *Iliescu Th. Theodor* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ionescu Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galaţi), *Lăzărescu Fl. Şt.* (Giurgiu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mauriciu Ghelber* (Seminarul Pedogogic, Bucureşti), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăilescu Romeo* (lic. R.-Vâlcea), *Niculescu I. C-tin* (Piteşti), *Pantazi G. D-tru* (lic. Brăila), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Petrulian St. N.* (lic. Ploeşti), *Popa P. Nicolae* (Constanţa), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popescu Gh. Florian* (lic. Giurgiu), *Popovici I. Dan* (Chişinău), *Popovici Th. Ioan*, *Rădulescu P. Stelian*, *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solomon N.* (Timişoara), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Tauber Alex.* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Vasiliu C. I.* (M-rea Dealu), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu) şi *Vătăşan G. Ovid* (lic. Braşov).

PROBLEME PROPUSE

268. — Să se găsească un număr de patru cifre în care suma produselor primelor trei luate două câte două, să fie egală cu produsul ultimelor trei cifre, iar ultima cifră să fie îndoitul primei mărit cu unitatea.

DRAGOMIR N. IOAN

269. — Se cere restul diviziunei numărului:

$$159^{951},$$

prin 951.

EMIL ŞTEFANESCU

270. — Dacă, $x+y+z=0$, atunci:

$$(x^5+y^5)^{33}+z^{55}(z^2-3xy)^{55},$$

se divide prin, $x^3+y^3+z^3$.

V. ALACI

271. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 4\,C_x^{y+1} = 5\,C_{x-1}^{y} \\ 2\,C_{x+1}^{y+1} = 3\,C_x^{y-1}, \end{cases}$$

C fiind simbolul combinărilor.

I. COSEREANU

272. — Doi călători merg pe acelaş drum. Unul pleacă dintr'o localitate A spre alta B, iar celalt din B spre A şi se întâlnesc într'o localitate C. In momentul întâlnirei primul făcuse 20 kilometri mai mult ca al doilea. Păstrând aceiaşi viteză sosesc primul în localitatea B după $\frac{14}{3}$ ore dela întâlnire, iar al doilea în A după $\frac{54}{7}$ ore dela întâlnire.

Să se afle distanţa dintre cele două localităţi.

ALEX. ZAMFIRESCU-PITESTI

273. — Fie un triunghiu ABC, înscris într'un cerc O. Fie A_1 şi A_2 proecţiile piciorului perpendicularei AA', pe laturile AB şi AC. Să se demonstreze că dreapta A_1A_2, este perpendiculară pe diametrul vârfului A.

PINCU KATZ

274. — Se consideră un punct P mobil pe cercul O şi un diametru fix AB. Care este locul geometric al intersecţiei M al dreptelor KB şi LP, K şi L fiind două puncte situate respectiv pe AP şi AB, astfel ca:

$$\frac{KA}{KP}=\frac{a}{b} \quad \text{şi} \quad \frac{LA}{LB}=\frac{c}{d}$$

I. M. SERBANESCU

275. — Să se demonstreze că în orice triunghiu, există relaţiunea:

$$\frac{8s^3}{h_a \cdot h_b \cdot h_c}=\frac{r_a r_b r_c (r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

notaţiunile fiind cele obicinuite.

UDRISKY TRAIAN

INFORMATIUNI

La 23 Septembrie va avea loc inaugurarea solemnă a primului pavilion al Şcoalei Politechnice din Timişoara în prezenţa Majestăţii Sale Regelui Ferdinand care va vizita Timişoara.

Clădirea acestui pavilion începută încă de anul trecut, va fi terminată pentru anul şcolar şi va fi pusă la dispoziţia studenţilor din ce în ce mai numeroşi. Amfiteatrele construite în acest pavilion vor putea conţine 150 — 200 ascultători.

In acest nou pavilion s'au instalat laboratoarele pentru rezistenţă şi încercările de materiale, care se compun până acum din două secţiuni. Incercările generale pentru metale şi materiale diferite, şi încercările cimentului, mortarelor şi pietrelor. Maşinile şi instalaţiile necesare au fost comandate din anii trecuţi şi acum sunt în curs de montare urmând ca totul să fie gata cu ocazia inaugurării, de asemenea un atelier este în formare pentru lucrările laboratoarelor şi pentru practica studenţilor.

Noul pavilion face posibilă extinderea şcolii care acum s'a completat având patru ani de studii.

Datorită faptului că sălile spaţioase permit, se vor admite anul acesta un număr mai mare de studenţi în anul I, ceiace nu era posibil până acum din lipsă de spaţiu.

După rezultatele examenului de admitere se vor putea primi în anul I până la 150 studenţi.

Odată cu aceasta s'a mărit şi căminul amenajându-se camere în plus şi cumpărându-se paturi din nou. Totuşi numărul locurilor în cămin nu va putea trece peste 130, din cauza localului insuficient.

Dorinţa de a începe încă de anul acesta construcţia căminului, prevăzută în planul general de lucrări nu a putut fi realizată din cauza greutăţilor financiare. Aşa că pavilionul ce se inaugurează acum este primul pas pentru realizarea programului şcolii.

Venirea Majestăţii Sale Regelui la Timişoara este o înaltă onoare pentru Şcoala Politechnică şi dovedeşte că rolul ce l'a luat şi-l îndeplineşte cu deosebită râvnă, mergând înainte pe terenul technic şi economic şi va fi un imbold pentru a duce mai departe desvoltarea şi perfecţionarea şcolii.

——

Examenul de admitere în anul I, al Şcoalei Politechnice, începe **Luni 8 Octombrie,** la ora $8^1/_2$ dimineaţa. Candidaţii vor trebui să aibă depuse actele de înscriere şi taxa de examen de 100 lei achitată la secretariat, cel mai târziu până la 1 Octombrie pentru a fi trecuţi pe listă şi admişi la examen.

Examenul are loc din aceleaşi materii ca şi anul trecut publicate în numerile trecute ale R. M. T.

In special probele scrise de *Algebră, Geometrie* şi *Trigonometrie* sunt importante căci reprezintă tocmai materia de bază din liceu. Problemele propuse la aceste lucrări scrise trebuesc să fie rezolvate bine şi redactate cu îngrijire. Multă atenţie trebue dată la variaţiile de funcţiuni şi la calculul numeric dela trigonometrie cu ajutorul logaritmilor.

Nu ne îndoim că mulţi dintre corespondenţii noştri din clasa VIII se vor înscrie la examen, şi vor avea acelaş succes ca şi candidaţii din anul trecut, dovedind astfel excelenta preparaţie pe care o aduce revista noastră. Sfătuim în special corespondenţii noştri să lucreze problemele propuse la concursurile trecute şi publicate în colecţiile R. M. T. aceasta fiind cel mai bun mijloc de orientare asupra materiei cerută la examen. Tot acolo se vor putea găsi şi întrebările puse la oral la Algebră şi Geometrie.

——

S'a înfiinţat în Timişoara pe lângă Direcţia Poştelor o şcoală Superioară de poştă, telegraf, telefon. Această şcoală destinată pentru absolvenţii de liceu, are cursuri de doi ani de zile şi este destinată a forma personalul superior administrativ şi technic al poştelor. Cursurile se compun din cunoştinţele de drept, legislaţie, convenţii poştale şi telegrafice, precum şi cursuri technice de instalaţii telegrafică, telefonică, construcţii de linii, telegrafie fără fir, etc.

Candidaţii care nu cunosc manipularea aparatelor vor face înaintea şcolii un curs pregătitor de şease luni pentru a învăţa manipularea aparatului Morse, şi instalarea aparatelor telegrafice şi telefonice.

Amănunte detailate se pot cere dela diriginţii oficiilor poştale.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 OCTOMBRIE 1923 No. 8

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. MIHAIL GHERMANESCU PROPRIETATI ALE SERIILOR RECURENTE.
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 211, 224, 225, 236, 254.
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța că dela 15 August c. mai fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice următorii:

1, **Teodosiu Avram** Dr. în Matematici, Prof. la Academia de Agricultură și astronom la Universitate; **Arghir Iancu,** Prof. Tg.-Jiu; **Tino Ovidiu,** prof. lic. Șincai, București, str. Cornea 80; **Ghermănessu Mihail,** prof. lic. Cantemir, București, Roion 31

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL III. — No. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

PROPRIETAȚI ALE SERIILOR RECURENTE

de MIHAIL GHERMANESCU

Seriile recurente au fost studiate și aprofundate de mulți ani și-au făcut obiectul de preocupare a unor matematicieni ca *Laplace,* care le-a studiat ca fiind soluțiuni ale unei ecuațiuni diferențiale.

Studii elementare cu ajutorul aritmeticei și algebrei s'au făcut iarăși și se fac și astăzi, astfel că cu timpul au ajuns să formeze un capitol apreciat în chestiunile de teoria numerilor.

Câteva proprietăți ale acestor serii pe care le-am găsit voesc să le expun aci, având în vedere mai mult aplicațiile lor la calculul diferitelor sume.

O serie de cantități $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$ este definită când se dau primele două și relația de recurență care leagă trei termeni consecutivi ai seriei, care fie:

(1) $\quad u_n = pu_{n-1} + q\,u_{n-2},\ u_0 = 1,\ u_1 = p.$

1. *Teoremă. Termenul general u_n este dat de determinantul de ordinul n:*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & p & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & -q & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{vmatrix}$$

Avem evident:

$$\Delta_1 = p = u_1, \quad \Delta_2 = p^2 + q = u_2$$

Apoi:

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} + q \begin{vmatrix} 1 & -q & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & p & -q & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & -q & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & p \end{vmatrix}$$

$$= p\Delta_{n-1} + q\Delta_{n-2}$$

ceiace demonstrează teorema:

2. *Teoremă. Termenul general u_n este dat de expresiunea:*

(2) $\quad u_n = u_r u_{n-r} + q\,u_{r-1}\,u_{n-r-1}$

Pentru r dat, să presupunem această relațiune adevărată pentru $(n-1)$ și n. Multiplicând ambii membrii cu p și ținând seama de (1) putem scrie:

$$u_{n+1} - q\,u_{n-1} = u_r\,(u_{n+1-r} - q\,u_{n-1-r}) +$$
$$q\,u_{r-1}\,(u_{n-r} - q\,u_{n-r-2}) = (u_r\,u_{n+1-r} + q\,u_{r-1}\,u_{n-r})$$
$$- q\,(u_r\,u_{n-1-r} + q\,u_{r-1}\,u_{n-r-2})$$
$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad u_{n+1} = u_r\,u_{n+1-r} + q\,u_{r-1}\,u_{n-r}$$

și de oarece pentru $r = n$ avem evident:

$$u_{n+1} = u_n u_1 + q\,u_{n-1}\,u_0 = p\,u_n + q\,u_{n-1}$$

rezultă generalitatea relațiunei (2).

Această relațiune se poate pune sub câteva forme particulare remarcabile de care vom avea nevoe ulterior:

(2_1) $\quad u_{r+k} = u_r\,u_k + q\,u_{r-1}\,u_{k-1}$

(2_2) $\quad u_{2n} = u_{n+k}\,u_{n-k} + q\,u_{n+k-1}\,u_{n-k-1}$

(2_3) $\quad u_{2n} = u_n^2 + q\,u_{n-1}^2$

(2_4) $\quad u_{2n+1} = u_{n+1}\,u_n + q\,u_n\,u_{n-1}$

3. *Teoremă. Intre termenii seriei există relaţiunea:*

(3) $\quad u_{n+k} + (-q)^k\,u_{n-k} = u_n\,(u_k + q\,u_{k-2})$

Pentru $k = 1$, avem:

$$u_{n+1} - q\,u_{n-1} = p\,u_n$$

Pentru $k = 2$, avem:

$$u_{n+2} + q^2\,u_{n-2} = u_n\,(p^2 + 2q)$$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $\quad p\,u_{n+1} + q\,u_n + q\,(u_n - p\,u_{n-1}) =$

$p\,(u_{n+1} - q\,u_{n-1}) + 2q\,u_n = p^2 u_n + 2q\,u_n = (p^2 + 2q)\,u_n$

Să arătăm că dacă această relaţiune este adevărată pentru $(k-1)$ şi k, ea este adevărată şi pentru $(k+1)$. Avem deci prin ipoteză.

$$u_{n+k-1} + (-q)^{k-1}\,u_{n-k+1} = u_n\,(u_{k-1} + q\,u_{k-3})$$

$$u_{n+k} + (-q)^k\,u_{n-k} = u_n\,(u_k + q\,u_{k-2}).$$

Inmulţind pe prima cu q, pe a doua cu p şi adunând vom avea:

$$u_{n+k+1} + (-q)^k\,(p\,u_{n-k} - u_{n-k+1}) = u_n\,(u_{k+1} + q\,u_{k-1})$$

Insă:

$$p\,u_{n-k} - u_{n-k+1} = p\,u_{n-k} - (p\,u_{n-k} + q\,u_{n-k-1})$$

$$= -\,q\,u_{n-k-1}$$

deci:

$$u_{n+k+1} + (-q)^{k+1}\,u_{n-k-1} = u_n\,(u_{k+1} + q\,u_{k-1})$$

4. *Teoremă: Intre termenii seriei există relaţiunea:*

(4) $\quad u_{n+k}\,u_{n-k} - u_n^2 = (-1)^{n-k}\,q^{n-k+1}\,u_{k-1}^2$

Pentru $k = n$, avem:

$$u_{2n} = u_n^2 + q\,u_{n-1}^2$$

Pentru $k = n-1$, avem:

$$p\,u_{2n-1} - u_n^2 = -\,q^2\,u_{n-2}^2$$

sau:

$$u_{2n} - q\,u_{2(n-1)} = u_n^2 - q^2\,u_{n-2}^2$$

care este o identitate în virtutea relaţiunei (2_3).

Să arătăm că dacă relaţiunea este adevărată pentru $(n-1)$ şi n, va fi adevărată şi pentru $n+1$. Avem deci prin ipoteză:

$$u_{n+k-1}\,u_{n-k-1} - u_{n-1}^2 = (-1)^{n-k-1}\,q^{n-k}\,u_{k-1}^2$$

$$u_{n+k}\,u_{n-k} - u_n^2 = (-1)^{n-k}\,q^{n-k+1}\,u_{k-1}^2$$

Inmulţind prima relaţiune cu q şi adunând, vom avea, după relaţiunea (2_3) şi (3_3):

$$u_{2n} - u_{2n} = (-1)^{n-k}\,q^{n-k+1}\,u_{n-1}^2 +$$

$$(-1)^{n-k-1}\,q^{n-k+1}\,u_{k-1}^2 \equiv 0.$$

Rezultă că relaţiunile pe care le-am presupus adevărate, sunt pentru orice n, deci sunt generale.

Un caz particular în deosebi remarcabil, este $k = 1$. Avem următorul rezultat:

$$u_{n+1}\,.\,u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n-1}\,q^n$$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $\quad (p\,u_n + q\,u_{n-1})\,u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^{n-1}\,q^n$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $\quad u_n^2 - p\,u_n\,u_{n-1} - q\,u_{n-1}^2 = (-1)^n\,q^n$

5. *Teoremă: Doi termeni consecutivi ai unei serii recurente sunt legaţi prin relaţiunea:*

(5) $\quad u_n^2 - p\,u_n\,u_{n-1} - q\,u_{n-1}^2 = (-q)^n$

Aceste rezultate preliminarii odată stabilite, îmi propun, să le aplic la calculul câtorva sume importante, în legătură cu seriile recurente.

6. Fie de calculat suma:

$$s_n = 1 + u_1\,x + u_2\,x^2 + \ldots + u_n\,x^n$$

Putem scrie:

$$p\,s_n = p + (u_2 - q)\,x + (u_3 - q\,u_1)\,x^2$$

$$+ \ldots + (u_{n+1} - q\,u_{n-1})\,x^n$$

$$p\,s_n = p + \frac{1}{x}\,(u_2\,x^2 + u_3\,x^3 + \ldots + u_n\,x^n +$$

$$u_{n+1}\,x^{n+1}) - q\,x\,(1 + u_1\,x + u_2\,x^2 + \ldots + u_{n-1}\,x^{n-1})$$

$$p\,s_n = p + \frac{1}{x}\,(s_n + u_{n+1}\,x^{n+1} - 1 - u_1\,x)$$

$$- q\,x\,(s_n - u_n\,x^n)$$

(6) $\quad \overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $\quad (q\,x^2 + p\,x - 1)\,s_n = u_{n+1}\,x^{n+1}$

$$+ q\,u_n\,x^{n+2} - 1.$$

Dacă înlocuim x cu $-x$, obținem valoarea sumei:

$$(7)\quad s'_n = 1 - u_1 x + u_2 x^2 - u_3 x^3 + \ldots + (-1)^n u_n x^n$$

prin adunare și scădere, obținem sumele:

$$(8)\quad 1 + u_2 x^2 + u_4 x^4 + \ldots + u_{2n} x^{2n}$$

$$(9)\quad u_1 + u_3 x^2 + u_5 x^4 + \ldots + u_{2n+1} x^{2n}$$

Prin derivare se pot obține sumele:

$$(10)\quad u_1 + 2u_2 x + 3u_3 x^2 + \ldots + n u_n x^{n-1}$$

și în fine o mulțime de alte sume mai mult sau mai puțin remarcabile prin alcătuirea lor. Interesante sunt cazurile particulare $x = 1$. Avem de pildă:

$$(6_1)\quad 1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{u_{n+1} + q u_n - 1}{p + q - s}$$

$$(7_1)\quad 1 - u_1 + u_2 - \ldots + (-1)^n u_n = (-1)^n \frac{u_{n+1} - q u_n + 1}{p - q + 1}$$

deducem prin adunare:

$$(8_1)\quad 1 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = \frac{p u_{2n+1} - (q-1)(q u_{2n} - 1)}{p^2 - (q-1)^2}$$

7. Ca o imediată aplicație a acestei formule, putem calcula suma patratelor primilor n termeni ai seriei:

$$s_2 = 1 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$$

In adevăr, dacă înlocuim termenii u_{2k} prin valorile lor date de (2_3) vom obține:

$$1 + (u_1^2 + q) + (u_2^2 + q u^2) + (u_3^2 + q u_2^2) + \ldots + (u_n^2 + q u_{n-1}^2) = \frac{p u_{2n+1} - (q-1)(q u_{2n} - 1)}{p^2 - (q-1)^2}$$

$$1 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + q(1 + u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-1}^2) = s_2 + q(s_2 - u_n^2) = \frac{p u_{2n+1} - (q-1)(q u_{2n} - 1)}{p^2 - (q-1)^2}$$

$$(9)\quad (1+q) s_2 = \frac{p u_{2n+1} - (q-1)(q u_{2n} - 1)}{p^2 - (q-1)^2} + q u_n^2$$

Se poate calcula suma s_2 și pe altă cale. Avem:

$$u_1^2 = p^2$$

$$u_2^2 = (p u_1 + q)^2 = p^2 u_1^2 + 2 p q u_1 + q^2$$

$$u_3^2 = (p u_2 + q u_1)^2 = p^2 u_2^2 + 2 p q u_1 u_2 + q^2 u_1^2$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$u_{n+1}^2 = (p u_n + q u_{n-1})^2 = p^2 u_n^2 + 2 p q u_{n-1} u_n + q^2 u_{n-1}^2$$

Adunând aceste relațiuni membru cu membru, obținem:

$$s_2 + u_{n+1}^2 - 1 = p^2 s_2 + 2 p q \sum_1^n u_{i-1} u_i + q^2 (s_2 - u_n^2)$$

$$(10)\quad (p^2 + q^2 - 1) s_2 + 2 p q \sum_1^n u_{i-1} u_i = u_{n+1}^2 + q^2 u_n^2 - 1.$$

De altă parte, din relațiunea dela teorema 5, deducem succesiv:

$$u_1^2 - p u_1 u_0 - q = -q$$

$$u_2^2 - p u_2 u_1 - q u_1^2 = q^2$$

$$u_3^2 - p u_3 u_1 - q u_2^2 = -q^3$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$u_n^2 - p u_n u_{n-1} - q u_{n-1}^2 = (-q)^n$$

relații, pe care adunându-le membru cu membru, obținem:

$$s_2 - 1 = p \sum_1^n u_{i-1} u_i - q(s_2 - u_n^2) = \frac{q[(-q)^n - 1]}{1 - q}$$

$$(11)\quad (1-q) s_2 - p \sum u_{i-1} u_i = 1 - q u_n^2 + \frac{q[(-q)^n - 1]}{1 - q}$$

Din relațiunile (10) și (11) se deduc sumele s_2 și

(12) $\quad P_n = u_0 u_1 + u_1 u_2 + \ldots + u_{n-1} u_n$

cu condiția $q \gtrless 1$.

8. Printr'un procedeu analog, vom calcula suma cuburilor primilor n termeni ai unei serii recurente:

$$s_3 = 1 + u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_n^3$$

Vom putea scrie, ca mai sus:

$$u_1^3 = p^3$$

$$u_2^3 = (p u_1 + q)^3 = p^3 u_1^3 + 3 p q u_1 (p u_1 + q) + q^3$$
$$= p^3 u_1^3 + 3 p q u_0 u_1 u_2 + q^3$$

$$u_3^3 = p^3 u_2^3 + 3 p q u_1 u_2 u_3 + q^3 u_1^3$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$u_n^3 = p^3 u_{n-1}^3 + 3 p q u_{n-2} u_{n-1} u_n + q^3 u_{n-2}^3$$

Insemnând cu π_3 suma $\sum_1^n u_{i-2} u_{i-1} u_i$ și adunând membru cu membru, vom avea:

$$s_3 - 1 = p^3 (s_3 - u_n^3) + 3 p q \pi_3 + q^3 (s_3 - u_{n-1}^3 - u_{n-2}^3)$$

(13) $\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}$ $(p^3 + q^3 - 1) s_3 + 3 p q \pi_3$
$$= p^3 u_n^3 + q^3 u_{n-1}^3 + q^3 u_{n-3}^2 - 1$$

De altă parte, dacă înmulțim relațiunea dela teorema (5) cu u_n, vom avea:

$$u_n^3 - u_n u_{n-1} (p u_n + q u_{n-1}) = (-q)^n u_n$$

$${}^{*}_{*}{}^{*}_{*} \quad u_n^3 - u_{n-1} u_n u_{n+1} = (-q)^n u_n$$

Dând lui n valorile dela 1 la n și adunând relațiunile obținute, membru cu membru, vom avea:

(14) $\quad s_3 - \pi_3 - u_{n-1} u_n u_{n+1} = \Sigma (-q)^n u_n$

Suma din membrul întâiu este valoarea lui s_n dela începutul acestui paragraf (6) pe care am calculat-o și în care facem $x = -q$. Relațiunile (13) și (14) permit calculul sumei s_3 și al sumei:

(15) $\quad \pi_3 = u_0 u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + \ldots + u_{n-2} u_{n-1} u_n$

atât timp cât p și q nu satisfac relațiunei:

(16) $\quad p^3 + 3 p q + q^3 = 1.$

9. Din aproape în aproape, putem calcula prin procedee analoage, orice sumă relativă la seriile recurente. Inainte de a aborda cazul general, voi calcula suma puterilor a patra a primilor n termeni

$$s_4 = 1 + u_1^4 + u_2^4 + \ldots + u_n^4$$

precum și suma:

$$\pi_2 = u_0^2 u_1^2 + u_1^2 u_2^2 + \ldots + u_{n-1}^2 u_n^2$$

Relațiunea (1) ridicată la puterea a patra, ne va da:

$$u_n^4 = p^4 u_{n-1}^4 + q^4 u_{n-2}^4 + 4 p q u_{n-2} u_{n-1} u_n$$
$$+ 6 p^2 q^2 u_{n-1}^2 u_n^2$$

Dând lui n valorile 1, 2, ... n și adunând, vom obține:

$$s_4 - 1 = p^4 (s_n - u_n^4) + q^4 (s_n - u_n^4 - u_{n-1}^4)$$
$$+ 4 p q \pi_3 + 6 p^2 q^2 \pi_2$$

(17) $\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}$ $(p^4 + q^4 - 1) s_4 + 4 p q \pi_3$
$$+ 6 p^2 q^2 \pi_2 = (p^4 + q^4) u_n^4 + q^4 u_{n-1}^4 - 1$$

De altă parte, relațiunea dela teorema (5) scrisă astfel:

$$p u_{n-1} u_n = u_n^2 - q u_{n-1}^2 - (-q)^n$$

și ridicată la patrat ne va da:

$$p^2 u_{n-1}^2 u_n^2 = u_n^4 + q^2 u_{n-1}^4 - 2 q u_{n-1}^2 u_n^2$$
$$- 2 (-q)^n (u_n^2 - q u_{n-1}^2)$$

deducem:

$$p^2 \pi_2 = s_4 - 1 + q^2 (s_4 - u_n^4)$$
$$- 2 q \pi_2 - 2 \Sigma (-q)^n (u_n^2 - q u_{n-1}^2)$$

(18) $\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}$ $(p^2 + 2 q) \pi_2 = (q^2 + 1) s_4$
$$- q^2 u_n^4 - 1 - 2 \Sigma (-q)^n (u_n^2 - q u_{n-1}^2)$$

Rămâne să calculăm sumele de forma:

(19) $\quad \sigma_1 = 1 + u_2^2 x + u_2^2 x^2 + \ldots + u_n^2 x^n$

Din cele scrise la paragraful (6) deducem:

$$1 + u_2 x^2 + u_4 x^4 + \ldots + u_{2n} x^{2n} =$$

$$\frac{(q x^2 - 1)(q x^{2(n+1)} u_{2n} - 1) - p x^{2(n+1)} u_{2n+1}}{(q x^2 - 1)^2 - p^2 x^2} = A$$

sau, ținând seamă de (2_8):

$$1 + (u_1^2 + q) x^2 + (u_2^2 + q u_1^2) x^4 + \ldots$$

$$\ldots + (u_n^2 + q u_{n-1}^2) x^{2n} = A$$

$$\sigma + q x^2 (\sigma - u_n^2 x^{2n}) = A$$

$$(q x^2 + 1)\, \sigma = A + q x^{2(n+1)} u_n^2$$

Dacă acum înlocuim peste tot x^2 prin x obținem suma căutată:

$$(q x + 1)\, \sigma_1 = 1 + u_1^2 x + u_2^2 x^2 + \ldots + u_n^2 x^n$$

$$= q x^{n+1} u_n^2 + \frac{(q x - 1)(q x^{n+1} u_{2n} - 1) - p x^{n+1} u_{2n+1}}{(q x - 1)^2 - p^2 x}$$

și cu aceasta, calculul sumelor s_n, π_n este asigurat.

Se vede ușor că suma σ_1 generalizează suma S_2 pătratelor primilor n termeni ai seriei recurente.

10. Imi rămâne acum pentru a încheia, să arăt cum se calculează din aproape în aproape orice sumă relativă la seriile recurente.

In primul rând, sumele puterilor asemenea $\sum_0^n u_i^k$ se calculează pornind tot dela relațiunea:

$$u_n = p u_{n-1} + q u_{n-2}$$

pe care vom ridica-o la puterea $k = 2m$, $2m+1$; vom obține respectiv:

$$u_n^{2m} = (p^{2m} u_{n-1}^{2m} + q^{2m} u_{n-2}^{2m}) +$$

$$C_{2m}^1 p q u_{n-1} u_n (p^{2(m-1)} u_{n-1}^{2(m-1)} + q^{2(m-1)} u_{n-2}^{2(m-1)})$$

$$+ C_{2m}^2 p^2 q^2 u_{n-1}^2 u_n^2 (p^{2m-3} u_{n-1}^{2m-3} + q^{2m-3} u_{n-2}^{2m-8})$$

$$+ \ldots + C_{2m}^m p^m q^m u_{n-1}^m u_{n-1}^m$$

$$u_n^{2m+1} = (p^{2m+1} u_{n-1}^{2m+1} + q^{2m+1} u_{n-2}^{2m+1}) +$$

$$C_{2m+1} p q u_{n-1} u_n (p^{2m} u_{n-1}^{2m} + q^{2m} u_{n-2}^{2m}) + \ldots$$

$$\ldots + C_{2m+1}^m p^m q^m u_{n-1}^m u_{n-2}^m (p u_{n-1} + q u_{n-2}).$$

Se vede de aci că va trebui să calculăm suma de forma:

$$\sum u_{n-1}^k u_{n-2}^k (p^r u_{n-2}^r + q^r u_{n-2}^r)$$

Relațiunea dela teorema (5) va da însă:

$$p^k \sum u_{n-2}^k u_{n-2}^k = \sum (u_{n-1}^2 - q u_{n-2}^2 - (-q)^{n-1})^k$$

In membrul al doilea avem sume de forma:

$$\sum u_n^{2s};\ \sum u_{n-1}^{2s} u_{n-2}^{2s};\ \sum u_n^{2s} x^t;\ \sum u_n^{2s} u_m^{1t} x^q$$

care se calculează prin diferite artificii, utilizând relațiunile stabilite anterior.

Mă opresc aci cu spicuirea în acest câmp. Subiectul este foarte vast, se poate căpăta încă o mulțime de alte rezultate noi, pe care le las în grija corespondenților acestei reviste.

NOTE MATEMATICE

Suma derivatelor unui polinom în x.

In No. 5, an. III „R. M. T.", d-l *Stoenescu* s'a ocupat de aflarea coeficenților unui polinom în x, cunoscând coeficenții polinomului egal cu suma polinoamelor derivate ale celui căutat.

In cele ce urmează voi stabili o metodă mai simplă pentru aflarea acelor coeficenți.

Fie, în general,

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2}$$

$$+ \ldots + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m$$

un polinom în x, de gradul m.

Dânduni-se că:

$$f'(x) + f''(x) + \ldots + f^m(x)$$

$$= a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

ne propunem să determinăm coeficienții A_0, A_1, $\ldots A_m$.

In suma tuturor derivatelor lui $f(x)$, avem un singur termen de gr $m-1$, al cărui coeficent e $m A_0$.

Deci:

$$m A_0 = a_1 \quad * * * \quad A_0 = \frac{a_1}{m}$$

De asemenea, x^{m-2} se găseşte de 2 ori, cu coeficenţii

$$m(m-1)A_0 \text{ şi } (m-1)A_1.$$

Rezultă:

$$a_2 = m(m-1)A_0 + (m-1)A_0.$$

Cum $A_0 = \frac{a_1}{m}$ scoatem: $A_1 = \frac{a_2 - (m-1)a}{m-1}$

In mod absolut analog;

$$A_2 = \frac{a_3 - (m-2)a_2}{m-2} \quad A_3 = \frac{a_3 - (m-3)a_3}{m-3} \text{ etc.}$$

Rămâne să arătăm că dacă

$$A_0 = \frac{a_1}{m}, \quad A_1 = \frac{a_2 - (m-1)a_1}{m-1},$$

$$A_n = \frac{a_{n+1} - (m-n)a_n}{m-n}$$

atunci şi

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+2} - (m-n-1)a_{n+1}}{m-n-1}$$

Intr'adevăr, din identificarea coeficenţilor rezultă:

$$a_{n+2} = (m-n-1)A_{n+1} + (m-n)(m-n-1)A_n$$
$$+ (m-n+1)(m-n)(m-n-1)A_{n-1} + \dots$$
$$\dots + (m-1)(m-2)\dots(m-n-1)A_1$$
$$+ m(m-1)(m-2)\dots(m-n-1)A_0$$

sau

$$a_{n+2} = (m-n-1)A_{n+1} +$$
$$(m-n-1)[a_{n+1} - (m-n)a_n] +$$
$$(m-n)(m-n-1)[a_n - (m-n+1)a_{n-1}] +$$
$$(m-n+1)(m-n)(m-n-1)[a_{n-1} - (m-n+2)a_n]$$
$$+ \dots + (m-2)(m-3)\dots(m-n-1)[a_2 - (m-1)a_1]$$
$$+ (m-1)(m-2)\dots(m-n-1)a_1$$

Observăm că $-(m-n-1)(m-n)a_n$ se reduce cu $(m-n-1)(m-n)a_n$ din termenul următor, etc.

Ne mai rămâne:

$$a_{n+2} = (m-n-1)A_{n+1} + (m-n-1)a_{n+1}$$

$$\text{sau} \quad A_{n+1} = \frac{a_{n+2} - (m-n-1)a_{n+1}}{m-n-1}$$

Cum formula e adevărată pentru 1, 2, 3, rezultă că, în orice caz

$$A_n = \frac{a_{n+1} - (m-n)a_n}{m-n}$$

Exemplu. Vom lua chiar exemplul din nota d-lui Stoenescu.

Avem:

$$a_1 = 1, \; a_2 = 3, \; a_3 = 3, \; a_4 = 1, \; m = 4.$$

Deci,

$$A_0 = \frac{a_1}{m} = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \frac{a_2 - (m-1)a_1}{m-1} = \frac{3 - 3.1}{3} = 0$$

$$A_2 = \frac{a_3 - (m-2)a_2}{m-2} = \frac{3 - 2.3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$A_3 = \frac{a_4 - (m-3)a_3}{a_3} = \frac{1-3}{1} = -2$$

Deci,

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + k.$$

După cum se vede, metoda aceasta prezintă mai multe avantagii, căci:

1) Nu avem de rezolvat un sistem de m ecuaţ cu tot atâtea necunoscute, care prezintă dificultăţ când m e prea mare.

2) Putem afla oricare din coeficenţii A_1, A A_m, fără a cunoaşte pe cei precedenţi, cum se fa în nota arătată.

LEON WEISS
cl. VII R. „V. Alexandr
Galaţi.

BIBLIOGRAFIE

E. Abasohn. Chestiuni de examen, propuse la examenul de admitere în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele, în anii: 1913, 1914, 1915, 1916, 1918 şi 1919, apărute în broşură în biblioteca „Asociaţiei de matematici pure şi aplicate" şi cuprinzând soluţiunile la chestiunile menţionate. O recomandăm stăruitor studenţilor ce se prezintă la examenele de intrare la Şcoli politechnice.

Gazeta Matematică, anul XXVIII, No. 12, August 1923.

Generalizarea unei probleme de aritmetică, de Locot.-Col. *Gh. Buicliu.*

Gazeta Matematică, anul XXIX, No. 1, Septembrie 1923.

Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice". Regulamentul premiului *„Vasile Conta"*.

O problemă şi o teoremă asupra indicatorilor, de Căpitan *I. Linteş.*

PROBLEME REZOLVATE

211. — *Notaţiile fiind cele obicinuite, să se demonstreze că avem:*

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{2R}{r}$$

SERBAN A. GHEORGHIU

Prima soluţie dată de d-nii: *Brătăşanu George* (lic. Caracal), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani) şi *Weiss Leon* (lic. Galaţi).

Din formulele cunoscute:

$$(1)\qquad r_a=\frac{s}{p-a},\quad h_a=\frac{2s}{a},\quad r=\frac{s}{p}$$

deducem:

$$\frac{r_a}{h_a}-\frac{r_a}{2r}=\frac{a}{2(p-a)}-\frac{p}{2(p-a)}=$$

$$\frac{a-p}{2(p-a)}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad (2)\qquad \frac{r_a}{h_a}=\frac{r_a}{2r}-\frac{1}{2}$$

In mod analog:

$$(3)\qquad \frac{r_b}{h_b}=\frac{r_b}{2r}-\frac{1}{2},\quad \frac{r_c}{h_c}=\frac{r_c}{2r}-\frac{1}{2}$$

Adunând relaţiile (2) şi (3), găsim:

$$(4)\qquad \frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{r_a+r_b+r_c}{2r}-\frac{3}{2}$$

Cum,

$$r_a+r_b+r_c=4R+r,$$

deducem din (4):

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{4R+r}{2r}-\frac{1}{2}=\frac{2R}{r},$$

şi identitatea este astfel stabilită:

A 2-a soluţie dată de d-nii: *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bobârnac C. Mircea* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Coşereanu Ion* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Cristea Gh. Aurel* (lic. Focşani), *Dumitrescu Marin* (lic. Craiova), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Iordache N. Ion* (Student), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung-Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (lic. Giurgiu), *Popea Gh. Ovidiu* (lic. Chişinău), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (lic. Piteşti) şi *Witzmann H. Marcu* (lic. Galaţi).

Din formulele (1) de mai sus, deducem:

$$\frac{r_a}{h_a}=\frac{a}{2(p-a)}$$

şi tot aşa:

$$\frac{r_b}{h_b}=\frac{b}{2(p-b)},\quad \frac{r_c}{h_c}=\frac{c}{2(p-c)}$$

Atunci:

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=$$

$$1+\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}$$

Aducând în membrul al 2^{lea} la acelaşi numitor şi observând că:

$$2(p-a)(p-b)(p-c)+a(p-b)(p-c)+$$
$$b(p-a)(p-c)+c(p-a)(p-b)=$$
$$2p^3-2p^2(a+b+c)+2p(ab+bc+ac)-$$
$$2abc+p^2(a+b+c)-2p(ab+bc+ac)+$$
$$3abc=abc,$$

găsim:

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=\frac{abc}{2(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Știm însă că:

$$abc=4Rs$$

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{s^2}{p}$$

atunci:

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=2R\cdot\frac{p}{s}=\frac{2R}{r}$$

tocmai identitatea cerută.

A 3-a soluție dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Crețoiu A.* (lic. Cantemir, București), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Mateescu G.* (lic. Galați), *Mirescu A. Petre* (lic. Lazăr, București), *Rigani Cr.* (București), și *Stoenescu C. Ioan* (lic. Galați).

Din formulele cunoscute:

$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad h_a=\frac{s}{2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}},\quad r=\frac{p}{s}$$

deducem:

$$\frac{r_a}{h_a}=\frac{2R}{r}\sin^2\frac{A}{2}$$

In mod analog:

$$\frac{r_b}{h_b}=\frac{2R}{r}\sin^2\frac{B}{2},\quad \frac{r_c}{h_c}=\frac{2R}{r}\sin^2\frac{C}{2}$$

Atunci:

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=$$
$$1+\frac{2R}{r}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

Dar știm, că:

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}$$

astfel că:

$$1+\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}=1+\frac{2R}{r}\left(1-\frac{r}{2R}\right)=\frac{2R}{r}$$

identitatea cerută.

Observare. D-l *Georgescu Er. Florian,* deduce încă alte câteva identități.

Alte soluții date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Brătescu H. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Bușilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Ciută I. Gavril* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gogâlniceanu Mihail* lic. Brăila), *Katz Pincu* (lic. Galați), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung-Bucovina), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici I. Dan* și *Oprișanu G. Ernest.*

In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Alexandrescu N.* (Ploești), *Cazacincu A. Vasile* (lic. Național, Iași), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Grofșorean I. G.*, *Iliescu D. Emilian* (student), *Popea G. Ovidiu* (Chișinău), *Udrisky Traian* (lic. Arad) și *Tărăbuță C. Paul.*

224. — *O sferă și un cub au același volum. 1. Se tae sfera drept în două și cubul după planul diagonal; dintre suprafețele obținute care va fi mai mare? 2. Dacă cubul n'ar fi tăiat diagonal ci paralel cu una din fețe, cum ar fi fost suprafețele?*

CAPITAN I. LINTES

Soluție dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bârglăzan A.* (lic. Sibiu), *Cristea Gh. Aurel* (lic. Focșani), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *I. N. Georgescu-Val, Lăzărescu Fl. Ștefan* (lic. Giurgiu), *Mauriciu Ghelber* (Seminarul Pedagogic, București), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Popescu I. Grigorie* (Giurgiu), *Popovici P. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Rigani Cr.* (Șc. Politehnică, Timișoara), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

1. Fie r raza sferei şi a latura cubului, conform enunţului avem:

$$(1) \qquad \frac{4}{3}\pi r^3 = a^3.$$

Secţiunea făcută în sferă, este un cerc mare şi suprafaţa lui este:

$$s = \pi r^2,$$

iar secţiunea făcută în cub printr'un plan diagonal este un dreptunghiu cu laturile a şi $a\sqrt{2}$, deci suprafaţa lui este:

$$s_1 = a^2\sqrt{2}$$

Din (1) deducem:

$$a = r\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$$

şi atunci:

$$s_1 = r^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{16\pi^2}{9}}$$

Raportul ariilor celor două secţiuni, este:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{32\sqrt{2}}} < 1,$$

ceeace dovedeşte că: *suprafaţa secţiunei făcută în sferă, este mai mică ca suprafaţa secţiunei făcută în cub*, în condiţiile enunţului.

2. Dacă cubul este tăiat însă paralel cu una din feţe, suprafaţa secţiunei este:

$$s_2 = a^2 = r^2\sqrt[3]{\frac{16\pi^2}{9}}$$

şi atunci:

$$\frac{s}{s_2} = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{16}} > 1,$$

ceeace dovedeşte că: *suprafaţa sectiunei făcută în sferă, este mai mare ca acea făcută în cub*, în condiţiile enunţului.

1. *Observări:* D-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *Coşereanu Ion, Epure T. Ştefan* (Buzău), *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Katz Pincu* (Galaţi), *Popa P. Nicolae* (Constanţa), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab Bucureşti), *Solomon Weiss* (lic. Galaţi), *Solomon Wilhelm* (lic. Matei-Basarab Bucureşti), *Ştefănescu Emil şi Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), au dat altă interpretare enunţului, înţelegând că e vorba să se compare, nu ariile secţiunilor obţinute, ci ariile totale ale solidelor obţinute prin secţionare.

2. D-nii *Grofşoreanu I. Gh.* (lic. Arad), şi *Liuba Gh.* (lic. Arad), au verificat enunnţul în cazuri particulare.

In ultimul timp s'au primit soluţiuni dela d-nii: *Bercovici A. Emil, Comănescu-Bălteni Al.* (Olt), *Giotta Vincenţiu* (Bârlad), *Popovici Th., Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), şi *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu).

225. — *Să se găsească o progresiune aritmetică cu un număr impar de termeni, ştiind că suma termenilor de rang par este 234, a celor de rang impar 273 şi produsul terminilor extermi 225.*

I. N. GEORGESCU-VAL

Soluţie dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bârglăzan A., Botez St. Mihail* (Stud. Bucureşti), *Cazancincu A. V.* (lic. Naţional, Iaşi), *Cocorandu M.* (lic. Braşov), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice), *Dumitrescu Alexandru* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Dumitrescu C. Nicolae* (lic. Piteşti), *Galescu C. Teodor* (Orheiu), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Goldştein M.* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Grigorescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Grofşoreanu I. G.* (lic. Arad), *Iliescu St. Dima* (lic. Militar, Tg.-Mureş), *Harnagea Iorguţă* (lic. Huşi), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mauriciu Ghelber* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Marienuţ Uroş* (lic. Arad), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mauriciu Ghelber* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Popovici P. Dan* (Chişinău), *Nicolescu P. Vasile* (lic. Militar,Tg.-Mureş), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rădulescu P. Stelian* (Giurgiu), *Rădulet B. Remus* (lic. Făgăraş), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Ştefănescu Emil, Solomon Nicu, Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănciulescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Militar Tg.-Mureş), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie), *Vasiliu I.* (lic. M-rea Dealu) şi *Zană D-tru* (lic. Craiova).

Fie progresia aritmetică:

$$\div a \,.\, a + r \,.\, a + 2r \ldots a + 2nr,$$

cu $2n + 1$ termeni.

Conform enunțului:

$$\begin{cases} (a+r)+(a+3r)+\ldots+[a+(2n-1)r]=234 \\ a+(a+2r)+\ldots+(a+2nr)=273 \\ a(a+2nr)=225 \end{cases}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \begin{cases} na+n^2r=234 \\ (n+1)a+nr(n+1)=273 \\ a(a+2nr)=225 \end{cases}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \begin{cases} n(a+nr)=234 \\ (n+1)(a+nr)=273 \\ a(a+2nr)=225 \end{cases}$$

Impărțind ecuația 2ª cu prima, găsim:

$$\frac{n+1}{n}=\frac{273}{234}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad n=6.$$

Scăzând prima ecuație din a 2ª, ținând seama de valoarea lui n, și alăturând și ecuația ultimă, avem:

$$\begin{cases} a+6r=39 \\ a(a+12r)=225. \end{cases}$$

Eliminând pe a, găsim:

$$(39-6r)(39-6r+12r)=(39-6r)(39+6r)=225$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad 39^2-36r^2=225$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad r=\pm 6$$

Atunci:

$$a=39\mp 36$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad a=3 \text{ sau } a=75.$$

Dacă luăm $a=3$, $r=6$, $n=6$ găsim progresia:

$\div$ 3. 9. 15. 21, 27. 33. 39. 45. 51. 57. 63. 69. 75.

Dacă luăm $a=75$, $r=-6$, $n=6$, găsim aceiași progresie scrisă invers.

In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis N. Bernardo* (lic. R.-Sărat), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Diaconu Gh.* (lic. militar, Tg.-Mureș), *Grabovsky Eugen* (lic. Orhei) *Gheorghiu C.* (Comănești), *Ionescu Carol* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Nicolae* (lic. Pitești), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galați), *Nicolescu P. Vasile* (lic. militar, Tg.-Mureș), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popea Ovidiu* (Chișinău), *Popescu Grigore* (Giurgiu), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Răuț C-tin* (lic. M-rea Dealu) și *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu),

236. — *Să se pună sub formă de produs de factori, expresiunea:*

$$(ab-cd)(a^2-b^2+c^2-d^2)-$$
$$(ac-bd)(a^2+b^2-c^2-d^2).$$

I. DUMITRIU-ARAD

Notând cu E expresiunea dată, putem scrie succesiv:

$$E=(ab-cd)(a^2-d^2)+(ab-cd)(c^2-b^2)-$$
$$(ac-bd)(a^2-d^2)+(ac-bd)(c^2-b^2)=$$
$$(a^2-d^2)(ab-cd-ac+bd)-$$
$$(b^2-c^2)(ab-cd+ac-bd)=$$
$$(a^2-d^2)[a(b-c)+d(b-c)]-$$
$$(b^2-c^2)[a(b+c)-d(b+c)]=$$
$$(a^2-d^2)(a+d)(b-c)-(b^2-c^2)(a-d)(b+c)$$
$$=(a-d)(b-c)[(a+d)^2-(b+c)^2]=$$
$$(a-d)(b-c)(a+b+c+d)(a-b-c+d)$$

Soluțiuni analoage date de d-nii: *Adam M.* (Constanța), *Beju Traian* (lic. Arad), *Bercovici Sigmund* (lic. Pitești), *Berdan C.* (Bârlad), *Bobârnac Mircea* (Timișoara), *Ciută Gavril* (Timișoara), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Corșoreanu Gh. Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Cretoiu A.* (lic. Cantemir, București), *Cristea Gh. Aurel* (lic. Focșani), *Dobre V.* (Conductor de Lucrări Publice), *Drogeanu N. Nicolae* (Seminarul Pedagogic, București), *Dumitrescu Alexandru* (Seminarul Pedagogic, București), *Ebner Artur* (lic. Galați), *Enulescu Ovidiu* (lic. Chișinău), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Freier Em.* (lic. Focșani) *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul), București), *I. N. Georgescu-Val* (Timișoara), *Gheorghiu C.* Comănești), *Grofșorean I. Gh.* (lic. Arad), *Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru-Haret, București), *Katz Pincu* (Galați), *Kertész Paul* (lic. Arad), *Landes Felix* (lic. Arad), *Lăzărescu Fl. Șt.* (lic. Giurgiu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Măcrineanu Sterian* (Galați), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mihăilescu Romeo* (lic. R-Vâlcea), *Mauriciu Ghelber* (Seminarul Pedagogic, București), *Popa P. Nicolae* (Constanța), *Popescu I. Grigore* (Giurgiu), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iași), *Popovici A.*

C. (lic. Național, Iași), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici M. Iulian* (lic. Diacanovici-Loga, Timișoara), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rădulet B. Remus* (lic. Făgăraș). *Rigani Cr.* (Șc. Politechnică, București), *Singer Bella* (Institutul, Pompilian, București), *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stănciulescu George* (Pitești), *Tărăbuță Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie), *Țintă Elena* (Giurgiu), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Wagner W. Ilie* (lic. Militar, Craiova), *Weiss Leon* (lic. Galați), *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Zamfirescu Alexandru* (lic. Pitești) și *Zană N. D.* (lic. Craiova).

In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Agapescu M. Niculai* (lic. Național, Iași), *Alexandrescu N.* (Ploești), *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Timișoara), *Cocorandu M.* (Brașov), *Constantinescu N. Nicolae* (Seminarul Pedagogic), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Hartular Gheorghe*, *Hristodor P. Nicolau* (Ploești), *Iacovachi N. Ionel* (lic. Focșani), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Nicolau Gh. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Popovici Th. Ioan*, *Scripcă Laur* (lic. Național, Iași), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Solomon Nicu*, *Ștefănescu Emil*, *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu).

254. — *Să se transforme într'un produs, suma:*

$$z(x-1)(y-1)(y-x)+x(y-1)(z-1)(z-y)+y(z-1)(x-1)(x-z).$$

M. BOBARNAC

Soluțiune dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Beju Traian* (lic. Arad), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab, București), *Bercovici Sigmund* (Pitești), *Berdan C.* (Bârlad), *Ciută Gavril* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Csradin I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Drogeanu N. Niculae* (Seminarul Pedagogic, București), *Dumitrescu C. Nicolae* (lic. Pitești), *Gheorghiu C.* (Comănești), *Gheorghiu Olimpia* (București), *Goldstein M.* (Seminarul Pedagogic), *Grofșorean I. Gheorghe* (Arad), *Harnagia P. Iorguță* (lic. Huși), *Hristodorescu P. Nicolau* (Ploești), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Lăzărescu Fl. Șt.* (Giurgiu), *Mauriciu Ghelber* (Seminarul Pedagogic, București), *Mehlmann Theodor*, *Mihăilescu T. Romeo* (lic. R.-Vâlcea), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Solomon Nicu*, *Stamatiu I. Mihail* (Pitești), *Stănescu D.* (Galați), *Stănescu B. Gheorghe* (Prahova), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie) și *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

Insemnând cu S suma dată, putem scrie succesiv, făcând simplificările necesare:

$$S = z(x-1)(y-1)(y-x)+$$
$$(z-1)[x(y-1)(z-y)+y(x-1)(x-z)]=$$
$$z(x-1)(y-1)(y-x)+$$
$$(z-1)(xyz-xz-xy^2+xy+x^2y-xy-xyz+yz)$$
$$=z(x-1)(y-1)(y-x)+$$
$$(z-1)[z(y-x)-xy(y-x)]=$$
$$(y-x)[z(x-1)(y-1)+(z-1)(z-xy)]=$$
$$(y-x)(xyz-xz-yz+z+z^2-xyz-z+xy)=$$
$$(y-x)[z(z-y)-x(z-y)]=(y-x)(z-y)(z-x).$$

Soluție dată de d-l: *Adam I. Mircea* (Constanța).

Considerăm determinantul Vandermonde, descompus în factorii:

$$(1)\quad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}=(y-x)(x-y)(z-x)$$

Tot acest determinant îl punem sub altă formă: scădem elementele liniei a 2, din acelea ale primei linii și acelea ale a treia, avem:

$$(2)\quad \Delta=\begin{vmatrix}1-x & 1-y & 1-z\\ x & y & z\\ x(x-1) & y(1-y) & z(1-z)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ x-1 & y-1 & z-1\\ x(x-1) & y(y-1) & z(z-1)\end{vmatrix}=$$

$$x\begin{vmatrix}y-1 & z-1\\ y(y-1) & z(z-1)\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x-1 & z-1\\ x(x-1) & z(z-1)\end{vmatrix}$$

$$+z\begin{vmatrix}x-1 & y-1\\ x(x-1) & y(y-1)\end{vmatrix}=x(y-1)(z-1)(z-y)$$

$$+y(x-1)(z-1)(x-z)+z(x-1)(y-1)(y-x)$$

Egalând ultimii membrii din (1) și (2) găsim:

$$z(x-1)(y-1)(y-x)+x(y-1)(z-1)(z-y)$$
$$+y(z-1)(x-1)(x-z)=(y-x)(z-x)(z-y)$$

Observare. Propunătorul a descompus suma în factori, transformând prin formulele lui *Euler*, identitatea trigonometrică:

$$\Sigma \sin a \sin b (b-a) = \sin (a-b) \sin (b-c) \sin (c-a),$$

din „C. de P. Trigonometrie, pag. 381. A se vedea Articolul". O clasă de identităţi algebrice din „R. M. T". an II-lea, No. 1.

In ultimul timp sau primit soluţiuni dela d-nii: *Agapescu M. Nicolae* (lic. Naţional, Iaşi), *Apăteanu Camil* (Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Cazacincu A. V.* (lic. Naţional, Iaşi), *Cocorandu M.* (lic. Braşov), *Constantinescu M. Nicolau* (Seminarul Pedagogic), *Demetrescu Gh.* (Bucureşti), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val, Grabovscki Eugen* (lic. Orhei), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Iliescu D. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu Mircea* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galaţi), *Popovici Chr. Jean* (lic. Galaţi), *Niculescu Isaiia, Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Stănculescu George* (Piteşti), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu) *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina) şi *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu).

PROBLEME PROPUSE

285 — O trăsură merge dela A la B cu 8 km. pe oră; după 10 km. se întâlneşte cu un automobil care venea din B, de unde plecase cu 15 minute mai târziu. După o oră dela această întâlnire, automobilul — care fusese în A unde a trebuit să stea 20 de minute şi care întorcându-se în B — ajunge din nou trăsura. Se cere distanţa A B.

CAPITAN I. LINTES

286. — Să se găsească un număr de cinci cifre cub şi patrat perfect, astfel ca numărul format din ultimele trei cifre să fie patratul numărului format de ultimele două cifre, iar acesta să fie şi el patratul cifrei a doua.

IONESCU PAUL

287. — Să se găsească o fracţie, ştiind că suma patratelor termenilor unei fracţii echivalente cu ea este 41209.

EMIL STEFANESCU

288. — Fie A C diagonala cea mai lungă a rombului A B C D şi A_1, A_2, C_1, C_2 proecţiile lui A şi C pe laturile opuse.

1) Să se demonstreze că dreptele $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, A C şi B D sunt concurente.

2) Să se determine mărimea unghiului A a rombului astfel ca dreptele $A_1 C_1$ şi $A_2 C_2$ să fie perpendiculare pe A D şi A B.

AUG. COMAN.

289. — Se dau două cercuri secante O şi O'. Prin unul din punctele lor de intersecţie se duce o secantă variabilă care taie cercul O' în A, iar cercul O în B. Se unesc A şi B cu R al doilea punct de intersecţie al cercurilor. Din O şi O' se duc perpendiculare respectiv pe B R şi A R, care se întâlnesc în P. Se cere: 1) locul geometric al punctului P. 2) locurile geometrice ale intersecţiilor dreptelor O' P şi O P cu secanta A B.

I. COSEREANU

290. — Să se găsească maximul funcţiuni:

$$y = \operatorname{tg} x \cos^3 x - \operatorname{tg}^2 x (\sin^3 x - \sin^2 x - \sin x + 1),$$

fără ajutorul derivatelor.

Ş MUSTA

291. — Intr'un cerc O se duc două coarde perpendiculare A B şi C D şi diametrul A O, care tae cercul în E.

Se cere maximul sau minimul sumei ariilor triunghiurilor C M B şi D M E, punctul M variind pe arcul C A D.

V. ALACI

292. — Să se determine cantităţile constante a şi k astfel ca relaţiunile:

$$\sin (2a - x) = \sin x + k \sin (a - x)$$

$$\sin 4a - x) = \sin x + \sin (2a - x)$$

să se transforme în identităţi şi să se demonstreze exactitatea lor.

TR. LALESCU

Erată. Problemele din numărul 7 c., cu numerile 268 până la 275 inclusiv, vor purta de fapt numerile respectiv, 277 până la 284.

INFORMATIUNI

Rugăm pe corespondenţii noştrii a pune mai mare atenţie în redactarea soluţiunilor. Când cineva are satisfacţia de a găsi soluţia unei probleme, trebuie să aibă şi răbdarea a o redacta cu îngrijire, ca stil şi formă.

Fiecare problemă redactată, va cuprinde numărul de ordine din revistă şi enunţul ei subscris de propunător, apoi urmează soluţiunea şi semnătura complectă şi deslușită a rezolvitorului.

Fiecare problemă se va redacta pe o singură foaie, sau, dacă e nevoie de mai multe foi, ele se vor prinde la un loc.

Figurile se vor desemna pe foi aparte, care se vor prinde la un loc cu soluţiunea.

— —

Volumul anul I, al „R. M. T.“ este epuizat. Volumul al II-lea însă, broşat se găseşte la redacţie şi costă 50 lei.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 NOEMBRIE 1923 No. 9.

BIBLIOTECA
SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. V. ALACI. CATEVA INSUMARI TRIGONOMETRICE
2. NOTE MATEMATICE.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 238, 239, 240. 258.
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța că dela 15 August c. mai fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice următorii:

1, **Teodosiu Avram** Dr. în Matematici, Prof. la Academia de Agricultură și astronom la Universitate; **Arghir Iancu,** Prof. Tg.-Jiu; **Tino Ovidiu,** prof. lic. Șincai, București, str. Cornea 80; **Ghermănessu Mihail,** prof. lic. Cantemir, București, Roion 31

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL III. — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1923

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

CATEVA INSUMARI TRIGONOMETRICE

de V. ALACI

In "*Compléments de Trigonometrie*" de F. G. M., pag. 42 — 44, se întrebuinţează mai multe metode pentru a obţine: *suma sinusurilor şi cosinusurilor unor arce în progresiune aritmetică.* A treia metodă de acolo, constă în a considera pe cercul trigonometric începând din un punct A, n arce egale cu h:

$$AB = BC = \ldots = KL = h$$

şi în a proecta conturul poligonal ABC... KL şi rezultanta AL, pe o dreaptă ce face cu AB, unghiul a.

Atunci:

$$AB\cos a + AB\cos(a+h) + \ldots +$$

$$AB\cos[a+(n-1)h] = AL\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)$$

de unde:

$$(1)\quad \cos a + \cos(a+h) + \ldots + \cos[a+(n-1)h] = \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

fiindcă:

$$AB = 2\sin\frac{h}{2} \quad \text{şi} \quad AL = 2\sin\frac{nh}{2}$$

Dacă schimbăm pe a în $\frac{\pi}{2} - a$ şi h în $-h$, se deduce încă:

$$(2)\quad \sin a + \sin(a+h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

In felul acesta se obţin astfel, formulele de însumare a sinusurilor şi cosinusurilor unor arce în progresie aritmetică.

2. In cele ce urmează voesc a generaliza această metodă, stabilind câteva însumări trigonometrice generale, pe care particularizându-le convenabil vom putea forma unele sume trigonometrice interesante.

Pentru aceasta, pe cercul trigonometric începând din punctul A_0, considerăm arcele:

$$A_0A_1 = a_1h, \quad A_1A_2 = a_2h, \ldots$$

$$A_{k-1}A = a_kh, \ldots A_{n-1}A_n = a_nh,$$

unde h este un arc ce serveşte drept unitate, iar $a_1, a_2, \ldots a_k \ldots a_n$, sunt nişte numere pozitive întregi, fracţionare sau iraţionale.

Expresiunea lungimei coardelor acestor arce, este

$$(3)\quad A_{k-1}A_k = 2\sin\frac{a_kh}{2}, \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

iar:

$$(4)\quad A_0A_n = 2\sin\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}h.$$

Acum proectăm conturul poligonal $A_0A_1\ldots A_n$ şi rezultanta A_0A_n pe o dreaptă ce face cu A_0A_1, unghiul a. Suma proecţiunilor laturilor conturului poligonal, fiind egală cu proecţiunea rezultantei avem:

$$A_0A_1\cos a + A_1A_2\cos\left(a+\frac{a_1+a_2}{2}h\right) + A_2A_3\cos\left(a+\frac{a_1+a_2}{2}h+\frac{a_2+a_3}{2}h\right)+\ldots$$

$$+A_{k-1}A_k\cos\left(a+\frac{a_1+a_2}{2}h+\ldots+\frac{a_{k-1}+a_k}{2}h\right)+\ldots+A_{n-1}A_n\cos\left(a+\frac{a_1+a_2}{2}h+\ldots+\frac{a_{n-1}+h_n}{2}h\right)$$

$$=A_0A_n\cos\left(a+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{2}h\right)$$

Ţinând seamă de relaţiunile (3) şi (4) şi scriind prescurtat, avem:

$$(I)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{a_k h}{2}\cos\left[a+\frac{2(a_1+a_2+\ldots+a_k)-a_1-a_k}{2}h\right]=\sin\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}h\cos\left[a+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{2}h\right]$$

Dacă schimbăm pe a în $\frac{\pi}{2}-a$ şi h în $-h$, deducem încă:

$$(II)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{a_k h}{2}\sin\left[a+\frac{2(a_1+a_2+\ldots+a_k)-a_1-a_k}{2}h\right]=\sin\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}h\sin\left[a+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{2}h\right]$$

Prin împărţirea relaţiunei (II) prin (I), obţinem:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{a_k h}{2}\sin\left[a+\frac{2(a_1+a_2+\ldots+a_k)-a_1-a_k}{2}h\right]}{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{a_k h}{2}\cos\left[a+\frac{2(a_1+a_2+\ldots+a_k)-a_1-a_k}{2}h\right]}=\operatorname{tg}\left[a+\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{2}h\right]$$

Însumările (I), (II) şi (III) sunt acelea pe care le aveam în vedere, ele generează diferite însumări trigonometrice, particularizând pe a, a_k şi h, ceiace vom face mai departe.

3. Dacă în formulele (I) şi (II) luăm. $a=\frac{a_1 h}{2}$ obţinem formulele mai simple:

$$(I')\quad 2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{a_k h}{2}\cos\frac{2(a_1+a_2+\ldots+a_k)-a_k}{2}h=\sin(a_1+a_2+\ldots+a_n)h$$

$$(II')\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{a_k h}{2}\sin\frac{2(a_1+a_2+\ldots+a_k)-a_k}{2}h=\sin^2\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)h}{2}$$

4. Dacă în (I) şi (II) facem:

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=h.$$

deducem:

$$(5)\quad \cos a+\cos(a+h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$(6)\quad \sin a+\sin(a+h)+\ldots+\sin[a+(n-1)h]=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

tocmai formulele cunoscute (1) şi (2), cum de altminteri era de prevăzut.

5. Dacă luăm:

$$a_k=k,$$

atunci însumările (I), (II), (I') şi (II), devin:

$$(7)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{kh}{2}\cos\left(a+\frac{k^2-1}{2}h\right)=\sin\frac{n(n+1)h}{4}\cos\left[a+\frac{(n-1)(n+2)h}{4}\right]$$

$$(8)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{kh}{2}\sin\left(a+\frac{k^2-1}{2}h\right)=\sin\frac{n(n+1)h}{4}\sin\left[a+\frac{(n-1)(n+2)h}{4}\right]$$

$$(9)\quad 2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{kh}{2}\cos\frac{k^2h}{2}=\sin\frac{n(n+1)h}{2}$$

$$(10)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{kh}{2}\sin\frac{k^2h}{2}=\sin^2\frac{n(n+1)h}{4}$$

Observare. Dacă în (9) și (10) facem, $h=\frac{2\pi}{n(n+1)}$ obținem:

$$(11)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n(n+1)}\cos\frac{k^2\pi}{n(n+1)}=0$$

$$(12)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n(n+1)}\sin\frac{k^2\pi}{n(n+1)}=1.$$

Identitatea (6) din „R. M. T." vol. II, pag. 67, concordă cu identitatea (12) de aci pentru $\alpha=\beta=1$, $\gamma=0$.

6. Dacă luăm:

$$a_k=k(k+1),$$

și observăm că:

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=1\cdot2+2\cdot3+\ldots$$
$$+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

atunci însumările (I), (II), (I'), (II'), devin:

$$(13)\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k(k+1)h}{2}\cos\left[a-h+\frac{k(k+1)(2k+1)h}{6}\right]$$
$$=\sin\frac{n(n+1)(n+2)h}{6}\cos\left[a-h+\frac{n(n+1)(n+2)h}{6}\right]$$

$$(14)\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k(k+1)h}{2}\sin\left[a-h+\frac{k(k+1)(2k+1)h}{6}\right]$$
$$=\sin\frac{n(n+1)(n+2)h}{6}\sin\left[a-h+\frac{n(n+1)(n+2)h}{6}\right]$$

$$(15)\quad 2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k(k+1)h}{2}\cos\frac{k(k+1)(2k+1)h}{6}$$
$$=\sin\frac{n(n+1)(n+2)h}{3}$$

$$(16)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k(k+1)h}{2}\sin\frac{k(k+1)(2k+1)h}{6}$$
$$=\sin^2\frac{n(n+1)(n+2)h}{6}$$

7. Mai general dacă luăm:

$$a_k=k(k+1)\ldots(k+p-1)$$

și observăm că:

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=\sum_{k=1}^{k}k(k+1)\ldots(k+p-1)$$
$$=\frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1}$$

conform identității (7) din „R. M. T", vol. II, pag. 100, atunci însumările (I), (II), (I') și (II'), devin:

$$(17)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)h}{2}\cos\left[a-\frac{p!h}{2}+\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)(2k+p-1)h}{2(p+1)}\right]$$
$$=\sin\frac{n(n+1)\ldots(n+p)h}{2(p+1)}\cos\left[a-\frac{p!h}{2}+\frac{n(n+1)\ldots(n+p)h}{2(p+1)}\right]$$

$$(18)\quad \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)h}{2}\sin\left[a-\frac{p!h}{2}+\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)(2k+p-1)h}{2(p+1)}\right]$$
$$=\sin\frac{n(n+1)\ldots(n+p)h}{2(p+1)}\sin\left[a-\frac{p!h}{2}+\frac{n(n+1)\ldots(n+p)h}{2(p+1)}\right]$$

$$(19)\quad 2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)h}{2}\cos\frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)(2k+p-1)h}{2(p+1)}=\sin\frac{n(n+1)\ldots(n+p)h}{p+1}$$

$$(20)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k(k+1)\dots(k+p-1)h}{2} \sin\frac{k(k+1)\dots(k+p-1)(2k+p-1)h}{2(p+1)} = \sin^2\frac{n(n+1)\dots(n+p)h}{2(p+1)}$$

Insumările generale (17), (18), (19) şi (20), pentru $p=1$ şi $p=2$ devin (7), (8), (9), (10) şi (13), (14), (15), (16), de mai sus.

8. Dacă luăm:

$$a_k = k^2(k+1)^2$$

şi observăm că:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(k+2)(3k^2+6k+1)}{15}$$

conform identităţei (10) din „R. M. T.“, vol. II, pag. 101, atunci însumările (I), (II), (I′) şi (II′), devin:

$$(21)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k^2(k+1)^2 h}{2} \cos\left[a - 2h + \frac{k(k+1)(6k^3+9k^2+10k+4)h}{21}\right] = \sin\frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)h}{30} \cos\left[a - 2h + \frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)h}{30}\right]$$

$$(22)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k^2(k+1)^2 h}{2} \sin\left[a - 2h + \frac{k(k+1)(6k^3+9k^2+10k+4)h}{30}\right] = \sin\frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)}{30} \sin\left[a - 2h + \frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)h}{30}\right]$$

$$(23)\quad 2\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k^2(k+1)^2 h}{2} \cos\frac{k(k+1)(6k^3+9k^2+10k+4)h}{30} = \sin\frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)h}{15}$$

$$(24)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k^2(k+1)^2 h}{2} \sin\frac{k(k+1)(6k^3+9k^2+10k+4)h}{30} = \sin^2\frac{n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)h}{30}$$

9. Dacă luăm: $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$ şi observăm că:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}\right)$$

conform identităţii (11) „R. M. T“, vol. II, pag. 101, atunci însumările (I), (II), (I′) şi (II′), devin:

$$(25)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{h}{2k(k+1)\dots(k+p)} \cos\left[a - \frac{h}{2(p+1)!} + \frac{h}{2p}\left(\frac{2}{p!} - \frac{2k+p}{k(k+1)\dots(k+p)}\right)\right] = \sin\frac{h}{2p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right) \cos\left[a - \frac{h}{2(p+1)!} + \frac{h}{2p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right)\right]$$

$$(26)\quad \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{h}{2k(k+1)\dots(k+p)} \sin\left[a - \frac{h}{2(p+1)!} + \frac{h}{2p}\left(\frac{2}{p!} - \frac{2k+p}{k(k+1)\dots(k+p)}\right)\right] = \sin\frac{h}{2p}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right) \sin\left[a - \frac{h}{2(p+1)!} + \frac{h}{2p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right)\right.$$

$$(27)\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{h}{2k(k+1)\ldots(k+p)} \cos \frac{h}{2p}\left[\frac{2}{p!} - \frac{2k+p}{k(k+1)\ldots(k+p)}\right] = \sin \frac{h}{p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\right]$$

$$(28)\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{h}{2k(k+1)\ldots(k+p)} \sin \frac{h}{2p}\left[\frac{2}{p!} - \frac{2k+p}{k(k+1)\ldots(k+p)}\right] = \sin^2 \frac{h}{2p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\right]$$

Observare. In cazul particular $p=1$, însumările (27) și (28) se simplifică și devin:

$$(29)\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{h}{2k(k+1)} \cos \frac{(2k^2-1)h}{2k(k+1)} = \sin \frac{nh}{n+1}$$

$$(30)\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{h}{2k(k+1)} \sin \frac{(2k^2-1)h}{2k(k+1)} = \sin^2 \frac{nh}{2(n+1)}$$

Dacă aci facem $n=\infty$, obținem seriile remarcabile:

$$(31)\ 2\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{h}{2k(k+1)} \cos \frac{(2k^2-1)h}{2k(k+1)} = \sin h$$

$$(32)\ \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{h}{2k(k+1)} \sin \frac{(2k^2-1)h}{2k(k+1)} = \sin^2 \frac{h}{2}$$

10. Dacă luăm:

$$a_k = q^{k-1},$$

și observăm că:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{k=1}^{k} q^{k-1} = \frac{q^k - 1}{q-1}$$

însumările (I), (II), (I') și (II'), devin

$$(33)\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{q^{k-1}h}{2} \cos\left[a - \frac{h}{2} + \frac{(q^k + q^{k-1} - 2)h}{2(q-1)}\right]$$

$$= \sin \frac{(q^n-1)h}{2(q-1)} \cos\left[a - \frac{h}{2} + \frac{(q^n-1)h}{2(q-1)}\right]$$

$$(34)\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{q^{k-1}h}{2} \sin\left[a - \frac{h}{2} + \frac{(q^k + q^{k-1} - 2)h}{2(q-1)}\right]$$

$$= \sin \frac{(q^n-1)h}{2(q-1)} \sin\left[a - \frac{h}{2} + \frac{(q^n-1)h}{2(q-1)}\right].$$

$$(35)\ 2\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{q^{k-1}h}{2} \cos \frac{(q^k + q^{k-1} - 2)h}{2(q-1)}$$

$$= \sin \frac{(q^n-1)h}{2(q-1)}$$

$$(36)\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{q^{k-1}h}{2} \sin \frac{(q^k + q^{k-1} - 2)h}{2(q-1)}$$

$$= \sin^2 \frac{(q^n-1)h}{2(q-1)}$$

Observare. In cazul particular $q=2$, însumările (35) și (36), devin:

$$(37)\ 2\sum_{k=1}^{n} \sin 2^{k-2}h \cos(2^{k-1} + 2^{k-2} - 1)h = \sin(2^n - 1)h$$

$$(38)\ \sum_{k=1}^{n} \sin 2^{k-2}h \sin(2^{k-1} + 2^{k-2} - 1)h = \sin^2 \frac{(2^n-1)h}{2}$$

11. Luând pentru a_k alte funcțiuni de k, obținem și alte însumări. Însumările (I) și (II) — care au generat cele câteva însumări ce reiasă din exemplele tratate — le-am fi putut prezenta și direct, verificându-le prin transformarea produselor din primul membru în sume, fără a urma calea geometrică indicată mai sus, dar ar fi părut prea arbitrară și abstactă metoda directă.

NOTE MATEMATICE

Asupra unor ecuațiuni de gradul al doilea. Să considerăm ecuațiunile

$$(1)\ \frac{1}{x+2} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} = 0 \text{ și } (2)\ x^2 + ax + b = 0$$

și să demonstrăm următoarele două propoziții.

I. *Dacă ecuația (1) are o singură rădăcină pozitivă, ecuația (2) va avea o rădăcină cuprinsă între* 0 *și* 1.

Ecuația (1) se mai poate scrie

$$(1') \quad (1+a+b)x^2+(1+2a+3b)x+2b=0.$$

Această ecuație având o singură rădăcină pozitivă, urmează că ceialaltă rădăcină este negativă și deci produsul lor este negativ, adică:

$$(3) \quad \frac{2b}{1+a+b}<0.$$

Dacă însemnăm cu $f(x)$ primul membru al ecuației (2), vedem că:

$$f(0)\,f(1)=b(1+a+b)$$

prin urmare, ținând seama de (3), vedem că produsul $f(0)\,f(1)$ este negativ, ceiace ne arată că ecuația (2) are o rădăcină cuprinsă între 0 și 1.

II. *Dacă ecuația (1) are două rădăcini pozitive, ecuația (2) va avea două rădăcini cuprinse între* 0 *și* 1.

Fie m și n cele două rădăcini pozitive ale ecuației (1); așa că:

$$\frac{1}{m+2}+\frac{a}{m+1}+\frac{b}{m}=0 \text{ și } \frac{1}{n+2}+\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n}=0$$

Deducem de aci:

$$(4) \quad a=-2\frac{(m+1)(n+1)}{(m+2)(n+1)} \text{ și } b=\frac{m.n}{(m+2)(n+2)}$$

Vedem că $b>0$. Cum produsul mn este pozitiv, urmează că și $(1+a+b)>0$. Prin urmare

$$f(0)=b>0 \quad \text{și} \quad f(1)=1+a+b>0.$$

Fie:

$$\varepsilon=\frac{(m+1)(n+1)}{(m+2)(n+2)}$$

ε este deci cuprins între 0 și 1. Să calculăm pe $f(\varepsilon)$, ținând seama de (4). Avem:

$$f(\varepsilon)=-\frac{(m+1)^2(n+1)^2}{(m+2)^2(n+2)^2}+\frac{m(m+1)n(n+1)}{(m+1)^2(n+1)^2}$$

Cum $(m+1)^2>m(m+1)$ și $(n+1)^2>n(n+1)$ rezultă imediat că $f(\varepsilon)<0$.

Prin urmare ecuația (2) va avea o rădăcină cuprinsă între 0 și ε și alta cuprinsă între ε și 1.

A. ANGELESCU
Cluj

Eliminantul a două ecuații de gradul al 2-lea. Iată o metodă interesantă pentru calcularea eliminantului a două ecuații de gradul al 2-lea, care au o rădăcină comună

Fie ecuațiile:

$$ax^2+bx+c=0$$
$$a'x^2+b'x+c'=0,$$

care au pe x_2 rădăcină comună, x_1 și x'_1 fiind celelalte rădăcini.

Relațiile între rădăcini și coeficienți, dau:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \\ x'_1+x_2=-\dfrac{b'}{a'} \\ x'_1x_2=\dfrac{c'}{a'} \end{cases}$$

Considerăm acum identitatea evidentă.

$$(x'_1x_2-x_1x_2)^2-(x'_1-x_1)\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x'_1}\right)x'_1x_1x_2^2$$

pe care o mai scrim:

$$(x'_1x_2-x_1x_2)^2-[x'_1+x_2-(x_1+x_2)]\times$$
$$\left[\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\left(\frac{1}{x'_1}+\frac{1}{x_2}\right)\right]x'_1x_1x_2^2=0.$$

In virtutea realațiunilor (1), putem scri:

$$\left(\frac{c'}{a'}-\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{b'}{a'}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{c}-\frac{b'}{c'}\right)\frac{cc'}{aa'}=0$$

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0.$$

ALEXANDRU NICULESCU

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

EXAMENUL DE ADMITERE IN ANUL I.
8 şi 9 Octombrie 1923

TRIGONOMETRIE

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$1.8\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\left(45^0 + \frac{x}{2}\right) = 0.12.$$

2. Să se rezolve un trlunghiu când cunoaştem latura c, mediana şi înălţimea scoborîte din A.

$$c = 621{,}55\ m$$
$$m\,a = 362{,}30$$
$$h\,a = 289{,}25.$$

Să se examineze toate cazurile.

GEOMETRIE

1. Fie A B C D un patrat de latură dată. Se ridică în A şi C câte o perpendiculară pe planul A B C D, şi se ia pe aceste perpendiculare şi de aceiaşi parte a planului A B C D, lungimile A E egală cu diagonala patratului şi C F egală cu $\frac{3}{2}$ din această diagonală.

Se cere: *a.* Să se calculeze B E şi E F.

b. Să se arate că triunghiul B E F este dreptunghic.

c. Să se arate că E F este perpendiculară pe planul B E D.

d. Să se calcuieze volumul piramidei cu vârful în F şi cu baza D B E.

2. Se dă un punct fix A şi unul B mobil pe o dreaptă Δ. Se descrie cercul de diametru A B la care se duc tangentele paralele cu acest diametru. Se cere locul geometric al punctelor de contact T şi T′ când B se mişcă pe Δ.

3. Fie G punctul de intâlnire al medianelor unui triunghiu A B C. Dreapta A G întâlneşte cercul A B C în D. Să se demonstreze că avem relaţia:

$$9\,A\,G \cdot G\,D = \overline{A\,B}^2 + \overline{B\,C}^2 + \overline{C\,A}^2$$

ALGEBRĂ

1. Să se determine a şi b astfel ca funcţiunea:

$$y = \mathrm{arc\,tg}\,(1 + 2x) - \frac{a\,x + b}{2x^2 + 2x + 1} + \mathrm{L}\,(1 + 2x + 2x^2),$$

su admită pentru $x = 1$ şi $x = -1$, un maxim sau un minim. In urmă, se cere să se construiască grafic funcţiunea.

2. Fie x_1, x_2, x_3, x_4, rădăcinele ecuaţiei:

$$x^4 - 10\,x^3 + a\,x^2 - 50\,x + 24 = 0.$$

Să se determine a astfel ca:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4,$$

şi în acest caz să se calculeze rădăcinele.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul asociaţiei de matematică pură şi aplicată, anul III, No. 1, Septembrie 1923. Invăţământul Mecanicei în licee şi şcoli technice medii, de *D. Pompei* şi *O. Onicescu*, A propos dela théorie de Weyl, de *P. Nicolas.*

*

Gazeta Matematică, anul XXIX, No. 2, Octombrie 1923. Unul din primii profesori de matematică muntean: *Simion Marcovici*, de *Tr. Lalescu.* Asupra cronografului *Joly*, de *Căpit. I. Linteş.*

PROBLEME REZOLVATE

238. — *In cercul* O *de rază r se duce o coardă* $M\,N = 2\,l$ *pe care se ia începând din mijlocul său* A, *un segment* $A\,A_1 = \frac{l}{n}$. *Se duce perpendiculara* $A_1\,M_1$ *pe* $O\,A_1$, *pe care se ia segmentul* $A_1\,A_2 = \frac{A_1\,M_1}{n}$; *se duce perpendiculara* $A_2\,M_2$ *pe care se ia segmentul* $A_2\,A_3 = \frac{A_2\,M_2}{n}$ *şi aşa mai departe, punctele* M_1, M_2, $M_3, \ldots M_n$ *fiind pe cerc în ordinea scrisă.*

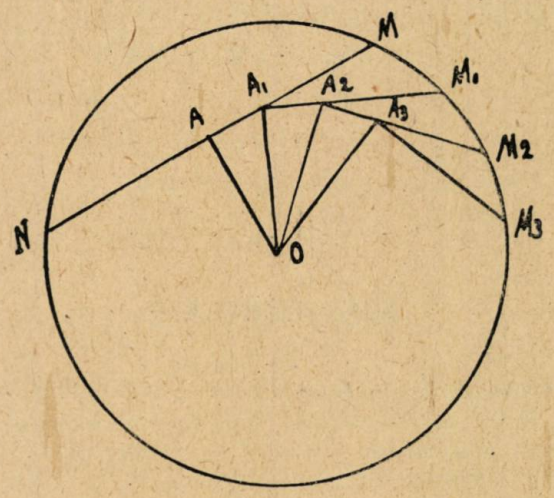
Să se calculeze suma:

$$\overline{O\,A_1}^2 + \overline{O\,A_2}^2 + \ldots + \overline{O\,A_n}^2$$

şi limita lui $O\,A_n$ *pentru* $n = \infty$.

V. ALACI

Soluţie dată de d-nii: *Bobârnac Mircea* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Ciută I. Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Cocorandu M.* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Katz Pincu* (Galaţi), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie) şi *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).



1. Din triunghiul dreptunghic OAM deducem

$$\overline{OA}^2 = r^2 - l^2,$$

iar din OAA_1:

$$(1)\quad \overline{OA_1}^2 = r^2 - l^2 + \frac{l^2}{n^2} = r^2 - \frac{l^2}{n^2}(n^2-1)$$

Din triunghiul dreptunghic OA_1M_1, deducem;

$$\overline{A_1M_1}^2 = r^2 - r^2 + l^2 - \frac{l^2}{n^2} = \frac{l^2}{n^2}(n^2-1),$$

deci:

$$\overline{A_1A_2}^2 = \frac{l^2}{n^4}(n^2-1),$$

și din triunghiul dreptunghic OA_1A_2, avem:

$$(2)\quad \overline{OA_2}^2 = r^2 - \frac{l^2}{n^2}(n^2-1) + \frac{l^2}{n^4}(n^2-1) = r^2 - \frac{l^2}{n^4}(n^2-1)^2$$

In mod analog deducem:

$$2)\quad \begin{cases} \overline{OA_3}^2 = r^2 - \dfrac{l^2}{n^6}(n^2-1)^3 \\ \overline{OA_4}^2 = r^2 - \dfrac{l^2}{n^8}(n^2-1)^4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{OA_n}^2 = r^2 - \dfrac{l^2}{n^{2n}}(n^2-1)^n \end{cases}$$

Adunând relația (1), (2) și (3), găsim:

$$\overline{OA_1}^2 + OA_2^2 + \ldots + \overline{OA_n}^2 = nr^2 - \frac{l^2}{n^2}(n^2-1)\left[1 + \frac{n^2-1}{n^2} + \frac{(n^2-1)^2}{n^4} + \ldots + \frac{(n^2-1)^{n-1}}{n^{2n-2}}\right]$$

$$= nr^2 - \frac{l^2}{n^2}(n^2-1)\left[-\frac{n^2[(n^2-1)^n - n^{2n}]}{n^{2n}}\right]$$

$$\ast\ast\ast\quad \overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 + \ldots + \overline{OA_n}^2 = nr^2 + \frac{l^2}{n^{2n}}(n^2-1)[(n^2-1)^n - n^{2n}]$$

2. Din ultima relațiune din (3), deducem:

$$\lim_{n=\infty} OA_n = \lim_{n=\infty} \sqrt{r^2 - l^2\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n} = \sqrt{r^2 - l^2} = OA$$

fiindcă:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{m=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^{-m^2}\right]^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$$

unde am pus $n = -m$.

Observare. Dacă în enunțul problemei, am fi luat

$$AA_1 = \frac{l}{m},\quad A_1A_2 = \frac{A_1M_1}{m},\quad A_2A_3 = \frac{A_2M_2}{m}$$

și așa mai departe, $m > 1$, procedând ca mai sus găsiam:

$$\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 + \ldots + \overline{OA_n}^2 = nr^2 - \frac{l^2}{m^{2n}}(m^2-1)[(m^2-1)^n - m^{2n}]$$

și:

$$\lim_{n=\infty} \overline{OA_n}^2 = \lim_{n=\infty} \sqrt{r^2 - l^2\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^n} = r,$$

fiindcă:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^n = \lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^n = 0.$$

V. A.

239. — *Fie* $tg\,\alpha$, $tg\,\beta$, $tg\,\gamma$ *rădăcinele ecuației*

$$x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0.$$

Să se calculeze valoarea expresiunei:

$$E = 2\cos^2\left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{\pi}{4}\right)$$

în funcție de p, q, r.

EMIL ȘTEFANESCU

Soluție dată de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Bârglăzan N. Aurel* (lic. Sibiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Bobârnac Mircea* (Timișoara), *Cocorandu M.* (lic. Brașov), *Cotea Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Iliescu Emil*, *Katz Pincu* (Galați), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung-Bucovina), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Niculescu Alexandru* (lic. Matei Basarab), *Popescu Iancu* (lic. Internat, Iași), *Scripcă C. Laur* (lic. Internat, Iași), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

Putem scrie succesiv:

$$E = 1 + \cos\left[2(\alpha+\beta+\gamma) - \frac{\pi}{4}\right] =$$

$$1 + \sin 2(\alpha+\beta+\gamma) =$$

$$1 + 2\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cos(\alpha+\beta+\gamma) =$$

$$1 + 2\frac{tg(\alpha+\beta+\gamma)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha+\beta+\gamma)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\alpha+\beta+\gamma)}}$$

$$= 1 + \frac{2\,tg(\alpha+\beta+\gamma)}{1+tg^2(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Dar:

$$tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\,tg\,\beta\,tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta - tg\,\alpha\,tg\,\gamma - tg\,\beta\,tg\,\gamma}$$

Privind ecuația dată și ținând seamă de relațiile dintre rădăcini și coeficienți, putem scrie:

$$tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{-p+r}{1-q}$$

Atunci:

$$E = 1 + \frac{\frac{2(r-p)}{1-q}}{1+\left(\frac{r-p}{1-q}\right)^2} = 1 + \frac{2(r-p)(1-q)}{(1-q)^2+(r-p)^2}$$

$$= \frac{(1-q+r-p)^2}{(1-q)^2+(r-p)^2}$$

Am calculat astfel pe E, în funcție de p, q, r.

Observări. 1. D-nii: *I. N. Georgescu-Val* și *Mehlmann Theodor*, au arătat că în mod analog deducem:

$$E = 2\sin^2\left(\alpha+\beta+\gamma-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(1-q-r+p)^2}{(1-q)^2+(r-p)^2}$$

2. D-l *Mehlmann Theodor*, a mai arătat că putem deduce:

$$E = 2\,tg^2\left(\alpha+\beta+\gamma-\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{r-p+q-1}{r-p-q+1}\right)^2$$

240. — *Dacă diferența dintre prima și ultima cifră a unui număr oarecare este o cifră cu soț, să se arate că diferența dintre acel număr și răsturnatul său este divizibil cu 6.*

GRIGORE ZAPAN

Soluție dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Epure T. Ștefan* (Buzău), *Iliescu Șt. Dima* (lic. milit. Tg.-Mureș), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea) și *Nicolescu P. Vasile* (lic. milit. Tg.-Mureș).

Fie $N = a_1 a_2 \ldots a_n$ un număr oare care și $N_1 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$ răsturnatul său. Diferența $D = N - N_1$ are drept cifră a unităților $(a_1 - a_n)$ care prin ipoteză este o cifră cu soț, urmează că D este divizibil cu 2. Să arătăm că D e divizibil și cu 3. In adevăr, numerile N și N_1 față de 3 se pot scri:

$$N = \text{mult. } 3 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

$$N_1 = \text{mult. } 3 + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1).$$

Deducem că:

$$D = N - N_1 = \text{mult. } 3$$

D fiind divizibil cu 3 și 2, este și cu 6.

Observări. 1) Diferența $D = N - N_1$ este divizibilă cu 9, fiindcă:

$$N = \text{mult. } 9 + (a_1 \quad a_2 + \ldots + a_n),$$

$$N_1 = \text{mult. } 9 + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1)$$

și deci: $D = N - N_1 = \text{mult. } 9$

D fiind multiplu de 9 și de 2 este multiplu și de 18.

2) D-l *Berdan C.* a arătat încă că: *a) Dacă* N *are* $2n+1$ *cifre, diferența* $D = N - N_1, -N_1$ *fiind răsturnatul lui* N — *este divizibil cu 11.*

Avem:

$$N = a_1 a_2 \ldots a_{2n+1} = \text{mult. } 11 +$$

$$(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}) - (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$$

$$N_1 = a_{2n+1} a_{2n} \ldots a_2 a_1 = \text{mult. } 11 +$$

$$(a_{2n+1} + \ldots + a_3 + a_1) - (a_{2n} + \ldots + a_4 + a_2)$$

Deducem: $N - N_1 = \text{mult. } 11.$

b). Dacă N *are* $2n$ *cifre, atunci,* $N + N_1 =$ *mult. 11,* N_1 *fiind răsturnatul lui* N.

Avem:

$$N = a_1 a_2 \ldots a_{2n} = \text{mult. } 11 +$$

$$(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})$$

$$N_1 = a_{2n} a_{2n-2} \ldots a_3 a_1 = \text{mult. } 11 +$$

$$(a_{2n} + a_{2n-2} + \ldots + a_2) - (a_{2n-1} + \ldots + a_1)$$

Deducem: $N + N_1 = \text{mult. } 11.$

A 2-a soluție dată de d-nii: *Bercovici A. Emil, Brădățeanu C. Cornel* (lic. Spiru Haret, București), *Brodschi I.* (lic. Cetatea Albă), *Cocorandu M.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Diaconu Gheorghe* (lic. milit. Tg.-Mureș), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Dumitrescu C. Nicolae* (Pitești), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Gheorghiu C.* (Comănești), *Grabovschi Eugeniu* (lic. Orhei), *Harnagea Iorguță* (lic. Huși), *Iliescu Emilian* (absol. lic. M-rea Dealu), *Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru-Haret, București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galați), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Negroiu Pascu* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Nicolescu I. C-tin* (Pitești), *Popea Ovidiu* (Chișinău), *Popovici Dan* (Chișinău), *Popovici Th. Ioan, Rădulescu P. Marin* (Giurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stefănescu Emil.* (lic. Spiru-Haret, București), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei-Basarab), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vlad F. Octavian* (Buzău), *Weiss Leon, Weiss Solomon* (lic. Galați), *și Zamfirescu Alexandru* (lic. Pitești).

Fie, $N = 10^n a_1 + 10^{n-1} a_2 + \ldots + 10 a_n + a_{n+1}$, atunci răsturnatul său este:

$$N_1 = 10^n a_{n+1} + 10^{n-1} a_n + \ldots + 10 a_2 + a_1$$

Prin scădere deducem:

$$D = N - N_1 = \underbrace{99..9}_{n} a_1 + \underbrace{99..90}_{n-1} a_2 + \underbrace{99..900}_{n-2} a_3 +$$

$$\ldots - \underbrace{999..900}_{n-2} a_{n-1} - \underbrace{99..90}_{n-1} a_n - \underbrace{99..9}_{n} a_{n+1}$$

Toți termenii din D se divid cu 9, deci D se divide cu 9.

$$D = 10^n (a_1 - a_{n+1}) + 10^{n-1} (a_2 - a_n) + \ldots$$
$$+ 10 (a_n - a_2) + a_{n+1} - a_1.$$

Fiindcă prin ipoteză, $a_{n+1} - a_1$, e pereche, urmează că D se divide și cu 2. D fiind divizibil cu 9 și 2 este și cu 18, deci și cu 6.

Observări. 1). D-l *Tauber Alexandru* a generalizat problema în felul următor: *Fie* N *numărul obținut scriind unul după altul numerile întregi* $N_1, N_2, \ldots N_{m-1}, N_m$ *de câte n cifre, și* N′ *numărul obținut scriind unul după altul numerile* $N_m, N_{m-1}, \ldots N_2, N_1$, *atunci dacă* $N_m - N_1$ *este divizibil printr'un divizor al lui* 10^n, *diferența* $N - N'$ *este un multiplu comun al acelui divizor și al numărului,* $10^n - 1$.

Intr'adevăr, avem:

$$N = 10^{(m-1)n} N_1 + 10^{(m-2)n} N_2 + \ldots + 10^n N_{m-1} + N_m$$

$$N' = 10^{(m-1)n} N_m + 10^{(m-2)n} N_{m-1} + \ldots + 10^n N_2 + N_1$$

deducem:

$$N - N' = [10^{(m-1)n} - 1](N_1 - N_m) +$$

$$[10^{(m-2)n} - 10^n](N_2 - N_{m-1}) + \ldots + (N_m - N_1)$$

$$= [10^{(m-1)n} - 1](N_1 - N_m) + \text{mult. } 10^n (10^n - 1).$$

Deci dacă, $N_1 - N_m = \text{mult. } 2^\alpha 5^\beta$, $\alpha \leqq n$, $\beta \leqq n$, atunci:

$$N - N' = \text{mult. } 2^\alpha 5^\beta (10^n - 1)$$

In cazul problemei date, $n = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, deci:

$$N - N' = \text{mult. } 2 \times 9 = \text{mult. } 18 = \text{mult. } 6.$$

2. D-l *Ştefănescu Emil,* a generalizat problema în felul următor: *Fie numărul* N *şi răsturnatul său* N, *scrise într'o bază oarecare* B.

$$N = B^n a_1 + B^{n-1} a_2 + \ldots + B^{n-p} a_{p+1} + \ldots + a_{n+1}$$

$$N_1 = B^n a_{n+1} + B^{n-1} a_n + \ldots + B^{n-p} a_{n+p+2} + \ldots + a_1$$

şi dacă, $a_{n+1} - a_1 = \text{mult. } B_1$, B_1 fiind un divizor al lui B, atunci $N - N_1$, e divizibil prin B_1 (B—1).

Pentru aceasta observăm că:

$$N - N_1 = (B^n - 1)(a_1 - a_{n+1}) + B \sum_{p=2}^{n} (B^{n-p} - B^{p-2})$$

$$= (B^n - 1)(a_1 - a_{n+1}) + \text{mult. } B(B-1).$$

Cum, $a_1 - a_{n+1} = \text{mult. } B_1$, rezultă:

$$N - N_1 = \text{mult. } B_1 (B - 1).$$

In cazul problemei date $B = 10$ şi $B_1 = 2$, deci:

$$N - N_1 = \text{mult. } 2 \times 9 = \text{mult. } 18 = \text{mult. } 6,$$

Au demonstrat problema în cazuri particulare, d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R-Sărat), *Bercovici Sigmund* (lic. Piteşti), *Comănescu Al.* (Bălteni), *Feneşan Iancu* (lic. Caransebeş), *Grofşorean I. Gh.* (lic. Arad), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Gh. Florian* (lic. Giurgiu), *Popescu D. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici Chr. Jean* (lic. Galaţi), *Singer Bella* (lic. Pompilian, Bucureşti), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Tărăbuţă I. Paul* şi *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie).

258. — *Să se demonstreze că într'un triunghiu* ABC, *avem:*

$$\frac{a^2 - b^2}{r_c + r} + \frac{b^2 - c^2}{r_a + r} + \frac{c^2 - a^2}{r_b + r} = 0.$$

COSEREANU I.

Soluţie dată de d-nii: *Alexandrescu N.* (Ploeşti), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Berdan C.* (Bârlad), *Cazacincu A. Vasile* (lic. Naţional, Iaşi), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cocorandu M.* (Şc. Pol. Timişoara), *Ciută I. Gavril* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Kazi Pincu* (Galaţi), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăilescu T. Romeo* (lic. R.-Vâlcea). *Muşta St.* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Popovici I. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Th. Ioan, Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stănciulescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stănescu D.* (Galaţi), *Stănescu A. Nicolae* (lic. Craiova), *Ştefănescu Emil, Tărăbuţă Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie).

Insemnăm cu E primul membru şi folosind relaţiile cunoscute:

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \quad r_b = \frac{s}{p-b}, \quad r_b = \frac{s}{p-c}, \quad r = \frac{s}{p}$$

avem:

$$E = \frac{p(p-c)}{s(a+b)}(a^2 - b^2) + \frac{p(p-a)}{s(b+c)}(b^2 - c^2)$$

$$+ \frac{p(p-b)}{s(c+a)}(c^2 - a^2) = \frac{p}{s}[(a-b)(p-c)$$

$$+ (b-c)(p-a) + (c-a)(p-b)] = 0,$$

ceiace reiasă desvoltând calculele din paranteza mare.

A 2-a soluţie dată de d-nii: *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Cretoiu A.* (Bucureşti), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

Folosim relaţiile (5) din „Compléments de Trigonométrie, pag. 596".

$$a^2 - b^2 = (r_a - r_b)(r + r_c), \quad b^2 - c^2 = (r_b - r_c)(r + r_a),$$

$$c^2 - a^2 = (r_c - r_a)(r - r_b),$$

de unde:

$$\frac{a^2 - b^2}{r_c + r} + \frac{b^2 - c^2}{r_a + r} + \frac{c^2 = a^2}{r_b + r}$$

$$= r_a - r_b + r_b - r_c + r_c - r_a = 0.$$

Relaţia cerută este astfel stabilită.

Alte soluţii date de d-nii: *Adam I. M.* (Constanţa), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Bârglăzan A.*, *Grofşorean Gheorghe* (lic. Arad), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Udrisky Traian* (lic. Arad). *Gheber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

PROBLEME PROPUSE

293. — Dintr'un număr se scade altul și se obține un al treilea. Dacă tot din acel număr se scade înzecitul celui de al doilea, se obține răsturnatul celui de al treilea. Să se găsească acele numere, știind că primul este de două cifre.

EMIL ȘTEFANESCU

294. — Dacă avem un număr m cifre, $m \geqq 6$. și permutăm în toate modurile posibile cifrele sale suma numerilor formate, inclusiv a celui dat, formează un număr divizibil cu 18.

V. ALACI

295. — Se dă un cerc O, două coarde concurente BC și $B'C'$ și P intersecția lor, Q al doilea punct de intersecție al cercurilor PCC' și PBB'. O_1 O_2 centrele lor.

Să se demonstreze că unghiul OQP este drept și că $OO_1 = O_2B$.

MAIOR O. BUGEANU

296. — Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se iau dela A spre B și C respectiv punctele P_1 și P_2 și dela B și C spre A punctele Q_1 și Q_2 astfel ca:

$$AP_1 = AP_2 = BQ_1 = CQ_2 = \frac{AB + AC}{2}$$

Se cere să se demonstreze că:

1. Dreptele P_1P_2 și Q_1Q_2 se întâlnesc în mijlocul M al laturei BC a triunghiului.

2. Că dreptele P_1P_2 și Q_1Q_2 sunt perpendiculare.

3. $P_1Q_1 = AC$ și $P_2Q_2 = AB$.

4. Că dreptele P_1P_2 și Q_1Q_2 sunt dreptele lui *Simson* relativ la triunghiul ABC ale punctelor depe diametrul ce trece prin M.

AUG. COMAN.

297. — Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$. Fie A_1, C_1 proecțiile lui A și C pe BD și B_1, D_1 proecțiile lui B și D pe AC.

Să se dovedească că avem:

$$\frac{AC}{AA_1 + CC_1} = \frac{BD}{BB^1 + DD_1}$$

OVIDIU GH. POPEA

298. — Să se descompună într'un produs, expresiunea:

$$(x-1)^3(y-z)^3 + (y-1)^3(z-x)^3 + (z-1)^3(x-y)^3$$

M SAVESCU

299. — Să se afle cel mai mare divizor comun și cel mai mic comun multiplu a polinoamelor:

$$x^6 + x^5 - 10x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 2x + 4$$

$$2x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 13x^2 + 18x - 8.$$

M VASILIU

300. — Să se demonstreze că în orice triunghiu există relațiunea:

$$\frac{a\cos^2\frac{A}{2} + b\cos^2\frac{B}{2} + c\cos^2\frac{C}{2}}{(p-a)\sin^2\frac{A}{2} + (p-b)\sin^2\frac{B}{2} + (p-c)\sin^2\frac{C}{2}} = 2\left(\frac{R}{r} + 1\right)$$

M BOBARNAC

301. — Se dă un triunghiu oarecare ABC înscris într'un cerc de rază R. Pe cerc se ia un punct D, diametral opus vârfului A. Unim D cu ortocentrul H al triunghiului ABC și fie E punctul de intersecție a lui BC cu DH. Se cere să se stabilească relațiunea:

$$\frac{\sqrt{4R^2 - \overline{AC}^2}}{DE\cos\alpha + BE\cos\beta} = 1$$

unde $\alpha = \sphericalangle BHD$, $\beta = \sphericalangle BCD$.

IULIU ORBONAS

302. — Să se stabilească relațiunea:

$$\frac{r}{R} = \frac{r_a\cos A}{h_a + 2r_a} + \frac{r_b\cos B}{h_b + 2r_b} + \frac{r_c\cos C}{h_c + 2r_c}$$

notațiunile fiind cele obicinuite.

C. D. MIHAESCU

INFORMATIUNI

Examenul de admitere în anul I al Şcolii Politechnice din Timişoara, s'a ţinut în zilele de 8, 9, 10, 11 Octombrie. Au fost 167 înscrişi 152 s'au prezentat la examen şi au reuşit 87 candidaţi care au fost înmatriculaţi în anul I.

Abonaţii Revistei Matematice din Timişoara şi cei cunoscuţi ca harnici corespondenţi au repurtat succesul bine meritat. Iată aci lista corespondenţilor noştri reuşiţi la examen şi ordinea în care au reuşit:

Gheorghiu Lucian	*1-ul*
Măru D-tru	*2-lea*
Cocorandu M.	*3-lea*
Schileru C. Dili	*4-lea*
Smighelschi Oct.	*5-lea*
Propst Jean	*9-lea*
Bârglăzan A.	*11-lea*
Stambuleanu A.	*15-lea*
Zaharia Emil	*16-lea*
Danciu A.	*18-lea*
Solomon Nic.	*26-lea*
Stănescu A. Nic.	*36-lea*
Stratulat I.	*37-lea*

Primii 5 admişi în şcoală sunt bine cunoscuţi tuturor corespondenţilor noştri. Paginile revistei sunt pline cu problemele rezolvate de dânşii. Şi munca aceasta a fost răsplătită prin locul ce au câştigat, şi în acelaşi timp şi bursa care le asigură continuarea mai departe a studiilor

Este de mirare totuşi că numărul de candidaţi corespondenţi ai revistei noastre este relativ mic. Am dori o mai mare răspândire a revistei, am dori ca toţi candidaţii noştri să se ocupe de aproape la rezolvarea problemelor publicate, să-şi întărească forţele prin exerciţii, pentruca să-şi asigure succesul.

— —

Duminică, 11 Noembrie, va avea loc inaugurarea primului pavilion al Şcoalei Politechnice din Timişoara, clădit în decursul acestui an. Majestatea Sa Regele, a acordat Inalta sa atenţiune acestui institut de cultură şi va veni la Timişoara pentru a lua parte la serbarea de inaugurare şi la deschiderea cursurilor. Familia Regală va fi întovărăşită de mai mulţi miniştri şi de toată oficialitatea.

Gestul Majestăţii Sale, care acordă o deosebită importanţă Şcoalei Politechnice, nu va scăpa nimănui. Şcoala acuma completă cu cei patru ani de studii, şi cu un an pregătitor şi-a instalat noile laboratoare şi săli de curs şi desemn în acest nou pavilion, înălţându-se astfel la rangul unei şcoli din străinătate, putând pune la dispoziţia studenţilor mijloacele cele mai bune de studiu, şi toate înlesnirile necesare. Munca corpului profesoral pentru ridicarea nivelului şcolii este astfel răsplătită, şi vizita Regală este cel mai preţios imbold pentruca cu o muncă îndoită să asigure şi mai departe şcolii acelaş mers ascendent. Studenţimea va avea ocazia ca să vadă interesul deosebit ce i se poartă de către toţi, şi să se convingă de solicitudinea cu care problema educaţiunei tinerelor generaţii este urmărită de toţi factorii cunoscători ai ţării. Şi însuşi publicul care alimentează şcoala, industria pentru care şcoala produce elementele de execuţie şi conducere, toţi factorii de propăşire technică şi economică vor aprecia sforţările depuse în acest colţ de ţară, care primesc acum cea mai înaltă consacrare oficială.

— —

Luăm cu plăcere cunoştinţă de faptul că elevii *cursului superior* dela liceul *„Diaconovici-Loga“* din Timişoara, s'au constituit într'o societate, numită *„Cercul matematic“*. In şedinţele săptămânale ale acestui cerc, se tratează de către membrii săi diferite chestiuni de matematici, în afară de cele de curs, precum şi chestiuni originale.

Dorim deplin succes acestui cerc matematic, şi dorim ca şi elevii altor licee din Ţară să procedeze astfel. Aceste unităţi vor lărgi de sigur orizontul cunoştinţelor matematice ale membrilor lor, le vor întări voinţa şi le vor ascuţi mintea spre cercetări originale.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 DECEMBRIE 1923 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN

CUPRINSUL

1. A. ANGELESCU-CLUJ. ASUPRA UNEI FORMULE DE DERIVARE.
2. NOTE MATEMATICE.
3. RECREATIUNI MATEMATICE.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 203, 204, 229, 231, 241, 250, 257, 260, 271.
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța că dela 15 August c. mai fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice următorii:

1, **Teodosiu Avram** Dr. în Matematici, Prof. la Academia de Agricultură și astronom la Universitate; **Arghir Iancu,** Prof. Tg.-Jiu; **Tino Ovidiu,** prof. lic. Șincai, București, str. Cornea 80; **Ghermănessu Mihail,** prof. lic. Cantemir, București, Roion 31.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara

---

ANUL III. — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1923

BIBLIOTECA ... STUDIO

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI. Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA UNEI FORMULE DE DERIVARE

de A. ANGELESCU-CLUJ

Fie o funcție oarecare $f(x)$. Derivata, în raport cu x, a funcției $f\left(\frac{1}{x}\right)$ este.

$$-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Derivata a doua a funcției $xf\left(\frac{1}{x}\right)$ este

$$\frac{1}{x^3}f''\left(\frac{1}{x}\right);$$

iar derivata a treia a funcției $x^2f\left(\frac{1}{x}\right)$ este

$$-\frac{1}{x^4}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$$

Zic că avem în general formula F_n

$$\frac{d^n x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Din cele văzute, rezultă că această formulă este adevărată pentru $n=1$, $n=2$ și $n=3$. Pentru verificarea formulei generale F_n, să presupunem arătată formula F_{n-1}

$$\frac{d^{n-1} x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

și să deducem că formula F_n este o consecință a formulei F_{n-1}. Formula F_n va fi astfel demonstrată din aproape în aproape.

Să plecăm, pentru acea, dela expresia

$$x.x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

considerată ca un produs de doi factori și să-i luăm derivata de ordinul n, aplicând formula lui Leibnitz. Avem astfel

$$(1) \quad \frac{d^n x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = x\frac{d^n x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} + n\frac{d^{n-1} x^{n-2} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-2}}$$

Ținând seama de formula F_{n-1}, membrul al doilea al relației (1) devine

$$(-1)^{n-1} x\frac{dx^{-n} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} + n\frac{(-1)^{n-1}}{x^n} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Efectuând derivarea din primul termen al acestei expresiuni, vedem că membrul al doilea al relației (1) se reduce la

$$\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Formula F_n este astfel demonstrată.

Obținem cazuri particulare simple ale acestei formule luând $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, etc.[1]

Aplicațiuni,

1°. *Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției* $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

(1) A se vedea Gazeta Matematică, Vol. IX, p. 283.

Să facem în formula F_n pe $f(x) = x^{n-1}\varphi(x)$. Vom avea

$$\frac{d^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \frac{d^n u^{n-1} \varphi(u)}{du^n},$$

în membrul al doilea, după efectuarea derivării, u va fi înlocuit prin $\frac{1}{x}$. Efectuând această derivare prin formula lui Leibnitz, avem deci[2]

$$\frac{d^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}}\left[\varphi^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + (n-1)\,C_n^1\, x\,\varphi^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left. + (n-1)(n-2)\,C_n^2\, x^2\,\varphi^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots\right]$$

2°. *Să se arate că seria*

$$\psi(x) + \frac{\alpha}{1}\frac{dx\psi(x)}{dx} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n x^n \psi(x)}{dx^n} + \ldots$$

reprezintă desvoltarea după puterile lui α, prin formula lui Taylor, a funcției

$$\frac{1}{1-\alpha}\psi\left(\frac{x}{1-\alpha}\right)$$

Să punem

$$\psi(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2}$$

Schimbând în această relație pe x în $\frac{x}{1-\alpha}$ vom avea

$$\frac{1}{1-\alpha}\psi\left(\frac{x}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1-\alpha}{x}\right) \tag{3}$$

Dar, după formula lui Taylor,

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x} - \frac{\alpha}{x}\right) = \sum (-1)^n \frac{\alpha^n}{n!\, x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Această relație devine, ținând seama de (3) și de formula F_n,

$$\frac{1}{1-\alpha}\psi\left(\frac{x}{1-\alpha}\right) = \sum \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n}$$

[2] Veniru o altă demonstrație a acestei formule, a se vedea exercițiile de Tisserand 1877) p. 24.

Inlocuind în membrul al doilea pe $f\left(\frac{1}{x}\right)$ prin valoarea sa $x\psi(x)$, dată de relația (2), avem relațiunea care demonstrează propoziția enunțată.

3. *Să se integreze ecuația diferențială lineară de ordinul n.*

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p a_p x^p \frac{d^p x^{p-1} y}{dx^p} = 0$$

coeficienții a_0, $a_1 \ldots$, a_n fiind constanți.

Fie $f\left(\frac{1}{x}\right)$ o integrală particulară a acestei ecuațiuni. Inlocuind în (4) pe y prin $f\left(\frac{1}{x}\right)$ și ținând seama de formula F_n, suntem conduși la identitatea

$$\sum_{p=0}^{p=n} a_p f^{(p)}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Schimbând în această identitate pe x în $\frac{1}{x}$, vedem că $f(x)$ trebue să fie soluție a ecuației diferențiale lineare cu coeficienți constanți

$$\sum_{p=0}^{p=n} a_n y^{(p)} = 0.$$

Integrala generală a ecuației (4) este deci

$$y = \sum_{i=0}^{i=n} C_i e^{\frac{1}{x} r_i}$$

unde r_1, r_2, $\ldots r_n$ sunt rădăcinele ecuației caracteristice

$$a_n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

iar C_0, C_1, $\ldots$, C_n sunt constante arbitrare.

NOTE MATEMATICE

Despre probabilitatea la zaruri. Zarurile, sunt întrebuințate la multe jocuri, încă din timpurile cele mai vechi. De obicei notația lor este acea cunoscută dela jocul de table, având pe fiecare față puncte reprezentând numere dela 1 până la 6.

Obicinuit, când se aruncă ambele zaruri, se fo-

loseşte situaţia lor prin adunarea punctelor dela amândouă, pe urmă se execută mişcarea jocului în consecinţă.

Se pune întrebarea, pentru care din aceste sumi există probabilitatea cea mai mare, de a fi obţinute şi deci pentru care din ele se poate conta mai mult.

Numerile ce se pot obţine prin adunarea punctelor de pe cele două zaruri sunt dela 2 la 12.

Pentru a obţine numărul 2, trebue să cadă pentru fiecare zar câte un punct şi dacă considerăm în special jocul de table, atunci avem numărul 2 de 2, ori, conform principiilor acestui joc. Deci avem 2 cazuri favorabile pentru numărul 2, unul după altul şi cum numărul total de cazuri, care se pot obţine cu aceste zaruri este 36, fiecare număr a unui zar putându-se lua cu fiecare număr a celuilalt, urmează că probabilitatea de obţinere a numărului 2 este

$$\frac{1}{36}=\frac{1}{18} \text{ adică } 5,\ 5\%.$$

Pentru a obţine numărul 3, trebue ca la zarul să avem una din poziţiile favorabile 1, 2 şi 2, 1 adică două poziţii ca şi în cazul precedent şi deci tot 5, 5% probabilitate.

Pentru a căpăta numărul 4, trebue să avem unul din cazurile, 1, 3 : 2, 2 : 2, 2 ; 3, 1 de unde rezultă probabilitatea

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9} \text{ sau } 11,\ 1\%.$$

La numărul 5, trebue să avem 1, 4 ; 2, 3 ; 3, 2 ; 4, 1 de unde rezultă posibilitatea $\frac{4}{36}$ sau 11, 1% procent.

Pentru numărul 6 trebue să avem, 1, 5 ; 2, 4 ; 3, 3 ; 3, 3 ; 4, 2 ; 5, 1 adică $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ sau 16, 7% probabilitate.

Pentru 7, avem : 1, 6 ; 2, 5 ; 3, 4 ; 4, 3 ; 5, 2 ; 6, 1 care ne dă aceiaşi probabilitate 16, 7%.

La numărul 8 avem : 2. 6 ; 3, 5 ; 4, 4 ; 4, 4 ; 5, 3 ; 6, 2 cu aceiaşi probabilitate 16, 7%,

Pentru a căpăta pe 9 trebue să avem : 3, 6 ; 4, 5 ; 5, 4 ; 6, 3 cu $\frac{4}{36}$ sau 11, 1% probabilitate.

La 10 avem : 4, 6 ; 5, 5 ; 5, 5 ; 4, 6 cu $\frac{4}{36}$ sau 11, 1%.

Pentru numărul 11 avem : 5, 6 ; 6, 5 cu $\frac{2}{36}$ sau 5, 5% procent.

Şi în fine pentru numărul 12 trebue să avem 6, 6 ; 6, 6 tot $\frac{2}{36}$ sau 5, 5%.

Rezumând aceste rezultate în tablou avem :

2,	3,	4,	5,	6,	7,
5, 5%,	5. 5%.	11, 1%,	11, 1%,	16, 7%,	16, 7%,

8,	9,	10,	11,	12,
16, 7%,	11, 1%,	11, 1%,	5, 5%,	5, 5%.

Din acest tablou se vede o perfectă simetrie faţă cu numărul 7 şi ca poziţie de numere şi ca procente. Sumele (6, 7, 8) sunt acelea care să întâlnesc cel mai des la jocul de zaruri şi în special la jocul de table, în rândul al doilea vine (4, 5) şi (9, 10), şi în ultimul rând cele mai mici (2, 3) şi cele mai mari (11, 12). *Se mai observă că procentul probabilităţii grupelor* (6, 7, 8) ; (4, 5, 9, 10) ; (2, 3, 11, 12) *variază în progresie aritmetică de raţie 5, 6.* Saltul deci, dela o grupă la alta este egal şi denotă că se poate trece continuu şi simetric dela o probabilitate la alta.

In ce priveşte "dublele" cum se numesc la jocul de table ele corespund la sumele din şirul de mai sus astfel :

Numere :

2, 4. 6, 8, 10, 12.

duble :

1, 1 ; 2, 2 ; 3, 3 ; 4, 4 ; 5, 5 ; 6, 6 :

procente :

5, 5%, 11, 1%, 16, 7%, 16, 7%, 11, 1%, 5, 5%

cu probabilităţile procentuale respective indicate.

Dublele sunt foarte căutate de jucători, căci atunci când au loc în număr mai mare, jucătorul ce le-a avut este sigur de câştig. Se vede din acest tablou, că dublele cele mai obicinuite sunt (3, 3) şi (4, 4) ca având procentul de probabilitate cel mai ridicat, apoi vine (2, 2) şi (5, 5) şi la urmă

(1, 1) şi (6, 6), adică dubla cea mai dorită (6, 6) este de acelaş rang cu (1, 1), în ultimul rând. Se mai vede de aci că căutatele „duble", nu au şansă mai mare de apariţie decât în aceiaşi proporţie cu numerile intermediare obicinuite, alăturate lor.

Rezultatele la care s'a ajuns, în analiza făcută până acuma, sunt acelea ce reese din consideraţii abstracte şi au loc ireproşabil atuncea când condiţiile de asvârlire sunt totdeauna la acelaş joc, aceliaşi.

De obicei jucătorul ce le aruncă, nu le dă totdeauna cu aceiaşi energie, aşa că se pot întâmpla abateri dela aceste reguli generale.

M VASILIU

Asupra unor integrale nedefinite. Să considerăm identitatea

$$(1)\quad f'(x)\left[\psi(x)f(x)-\varphi(x)\right]-f(x)\left[\psi(x)f'(x)\right]=-\varphi(x)f'(x)$$

şi să ne impunem condiţia

$$(2)\qquad \left[\psi(x)f(x)-\varphi(x)\right]'=\psi(x)f'(x)$$

adică

$$(2')\qquad f(x)\,\psi'(x)=\varphi'(x)$$

Impărţind ambii membri ai identităţii (1) prin

$$\left[\psi(x)f(x)-\varphi(x)\right]^2$$

şi integrând apoi membru cu membru, având în vedere condiţia (2), găsim

$$\int\frac{\varphi(x)f'(x)\,dx}{\left[\varphi(x)-\psi(x)f(x)\right]^2}=\frac{f(x)}{\varphi(x)-\psi(x)f(x)}+C$$

C fiind constanta de integrare. Particularizând funcţiunile φ şi ψ, iar f având valoarea corespunzătoare dată de (2)', căpătăm integrale nedefinite a căror valoare o cunoaştem.

A. ANGELESCU
Cluj

RECREAŢIUNI MATEMATICE

E uşor de observat din egalităţile ce urmează, proprietăţi curioase ale numerilor.

$$\begin{aligned}
1\times 8+1&=9\\
12\times 8+2&=98\\
123\times 8+3&=987\\
1234\times 8+4&=9876\\
12345\times 8+5&=98765\\
123456\times 8+6&=987654\\
1234567\times 8+7&=9876543\\
12345678\times 8+8&=98765432\\
123456789\times 8+9&=987654321,
\end{aligned}$$

tot astfel avem:

$$\begin{aligned}
1\times 9+2&=11\\
12\times 9+3&=111\\
123\times 9+4&=1111\\
1234\times 9+5&=11111\\
12345\times 9+6&=111111\\
123456\times 9+7&=1111111\\
1234567\times 9+8&=11111111\\
12345678\times 9+9&=111111111\\
123456789\times 9+10&=1111111111
\end{aligned}$$

O. SCHMAUTZ

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Metematică. anul XXIX, No. 3, 1923. O chestiune de geometrie analitică de *Ernest Abasohn.* Proprietăţi ale unui triunghiu important, de *Constantin I. Georgescu.*

L'Èducation mathématique. An. 26, No, 4, Noembrie 1923. Questions de calcul trigonométrique, par *M. Gh. Bioche.*

Matematicas y fisicas elementales, an. V. Octombrie 1923. Notas sobre las progresiones de *A. E. De Cesare.* Relaciones métricas en un triangulo cuyos lados están en progresión geométrica, de Subte. *A. Miclescu.*

PROBLEME REZOLVATE

203 — *Să se arate că într'un triunghiu avem:*

$$\frac{b\,c\sin 2A + a\,c\sin 2B + a\,b\sin 2C}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} = a\cot A + b\cot B + c\cot C.$$

T. POPOVICI

Ţinând seama de relaţiile cunoscute:

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2s}{R},$$

$$b\,c\sin A = a\,c\sin B = a\,b\sin C = 2s$$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

putem scri succesiv:

$$\frac{b\,c\sin 2A + a\,c\sin 2B + a\,b\sin 2C}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} =$$

$$\frac{4s(\cos A + \cos B + \cos C}{\frac{2s}{R}} =$$

$$2R\cos A + 2R\cos B + 2R\cos C =$$

$$a\cot A + b\cot B + c\cot C,$$

şi identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţiuni bune date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanţa), *Alexandrescu N.* (Ploeşti), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Bârglăzan A.* (Şc. Polit. Timişoara), *Beldie N. D-tru* lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Bobârnac Mircea* (Şc. Polit. Timişoara), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Brătescu H. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Buşilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Cazacincu A. Vasile* (lic. Naţional, Iaşi), *Cocorandu M.* (Şc. Polit. Timişoara), *Coşereanu Ion* (Şc. Polit. Timişoara), *Creţoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dobrescu-Băbici, Dragomir N. Ion* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Goldenberg I.* (Galaţi), *Grofşorean I. Gh.* (lic. Arad), *Grümberg H.* (Galaţi), *Haimovici Salo* (lic Galaţi), *Herscovici Emanoil* (Galaţi), *Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal), *Ionescu B. Ioan* (lic. Piteşti), *Iordache N. Ion* (student), *Iliescu Emilian* (Vâlcea), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Longinescu N. Abel* (Caracal), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mateescu G.* (lic. Galaţi), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina), *Mirescu A. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Niculescu Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Oprişanu G. Ernest* (student, Bucureşti), *Popea G. Ovidiu* (lic. Chişinău), *Popescu N. Nicolae* (lic. Câmpina), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Răuţ C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Rigani Cr.* (Şc. Polit. Bucureşti), *Ristea M.* (lic. Caracal), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solacolu Mircea* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Stamatiu Mihail* (lic. Piteşti), *Stănescu Nicu* (Şc. Politechnică, Timişoara), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Urzică Aurel* (lic. Deva), *Weiss Leon* (lic. Galaţi), *Weiss Solomon* (lic. Galaţi) şi *Witzman H. Marcu* (lic. Galaţi).

Soluţiune primită în ultimul timp dela d-nii: *Cristea Aurel* (lic. Focşani) şi *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu).

204. — *Elementele unui triunghiu fiind cele obicinuite, să se demonstreze relaţiile.*

$$\sum \frac{a}{b+c}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$$

$$\sum \frac{1}{a(b+c)}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p}{2rabc}$$

FLORIAN ER. GEORGESCU

Ţinând seama de relaţiile cunoscute:

$$\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2s},\quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2c},\quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$a+b+c = 2p,\ \frac{p}{s} = \frac{1}{r},$$

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2s}{R}$$

putem scri succesiv:

$$\sum \frac{a}{b+c}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= \sum \frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{2s}\cdot\frac{1+\cos A}{2} = \sum \frac{a(1+\cos A)}{4s}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c+a\cos A+b\cos B+c\cos C}{2s}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$$

şi prima relaţiune este astfel stabilită

Asemenea putem scri succesiv:

$$\sum \frac{1}{a(b+c)}\left(\frac{1}{h^b}+\frac{1}{h_c}\right)\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= \sum \frac{1}{a(b+c)}\cdot\frac{b+c}{2s}\cdot\frac{p(p-a)}{bc} = \frac{p}{2s}\sum\frac{p-a}{abc}$$

$$= \frac{1}{2r} \cdot \frac{p-a+p-b+p-c}{abc} = \frac{p}{2rabc}$$

și relația a doua este și ea stabilită.

Soluțiuni bune date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Alexandrescu Nicolae*, *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Bârglăzan A.* (Șc, Polit. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucnrești), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Bobârnac C. Mircea* (Șc. Polit., Timișoara), *Bonca Ion* (lic. M-rea Dealu), *Brătescu H. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Cazacincu A. V.* (lic. Național, Iași), *Cocorandu M.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Coșereanu Ion* Șc. Polit., Timișoara), *Crețoiu A.* (lic. Cantemir, București), *Dobrescu-Băbici, Dragomirescu-Buzne Eduard* (Șc. de Artilerie), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Craiova), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăi a), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Haimovici Salo* (lic. Galați), *Herșcovici Emanoil, Ionescu I. Brezuică* (lic. Caracal), *Ionescu B. Ioan* (lic. Pitești), *Ionescu I. Longinus* (lic. Caracal), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (lic. Giurgiu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mateescu G.* (lic. Galați), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Moroianu I. At.* (lic. Constanța), *Oprișanu G. Ernest* (student, București), *Percea Viorel* (lic. Timișoara), *Popea G. Ovidiu* (lic. Chișinău), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Ristea Marin* (lic. Caracal), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Stamatiu Mihail* (lic. Pitești), *Stambuleanu Adrian* (Șc. Polit., Timișoara), *Stănescu A. Nicolae* (raiova), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Taubner Alexandru* (Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Weiss Leon* (lic. Galați) și *Witzmann H. Marcu* (lic. Galați).

Observări. D-nii: *Oprișeanu G. Ernest*, *Popovici Th. Ion* și *Popovici Tiberiu* au stabilit și alte relațiuni analoage celor de mai sus.

229. — *Să se verifice egalitatea:*

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{(a-b)(a-2\sqrt{2}ab+b)}{2ab(1-a\sqrt{2})(1-b\sqrt{2})} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{b(1-a\sqrt{2})}{a(1-b\sqrt{2})} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

I. STOENESCU

Notăm:

$$(1)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{(a-b)(a-2\sqrt{2}ab+b)}{2ab(1-a\sqrt{2})(1-b\sqrt{2})} = \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\frac{b(1-a\sqrt{2})}{a(1-b\sqrt{2})} = \beta.$$

De aci deducem:

$$(2)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{(a-b)(a-2\sqrt{2}ab+b)}{2ab(1-a\sqrt{2})(1-b\sqrt{2})},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b(1-a\sqrt{2})}{a(1-b\sqrt{2})}$$

Avem însă ținând seamă de relațiile (2).

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\dfrac{2b(1-a\sqrt{2})}{a(1-b\sqrt{2})}}{1-\dfrac{b^2(1-a\sqrt{2})^2}{a^2(1-b\sqrt{2})^2}} =$$

$$\frac{\dfrac{2b(1-a\sqrt{2})}{a(1-b\sqrt{2})}}{\dfrac{(a-ab\sqrt{2}+b-ab\sqrt{2})(a-ab\sqrt{2}-b+ab\sqrt{2})}{a^2(1-b\sqrt{2})^2}}$$

$$= \frac{2ab(1-a\sqrt{2})(1-b\sqrt{2})}{(a-b)(a-2ab\sqrt{2}+b)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Avem deci:

$$\operatorname{tg}2\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + k\pi$$

sau:

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Inlocuind aci α și β cu valorile lor din (1). avem identitatea dată.

Soluțiuni bune date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Bârglăzan N. Aurel* (Șc. Polit. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Berdan I. C.* (Bârlad), *Bobârnac C. Mircea* (Șc. Polit. Timișoara), *Ciută I. Gavril, Cocorandu M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghiu C.* (Comănești), *Gheorghiu Olimpia* (Tulcea), *Grosu Ion* (lic. T.-Severin), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Lăzărescu Fl. Șt.* (Giurgiu), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Nicolau Gh. C-tin* (R.-Sărat), *Popea Gh. Ovidiu* (lic. Chișinău), *Popescu N. Nicu* (lic. Câmpina), *Popovici Th. Ioan, Solomon Nicu* (Șc. Polit. Timișoara), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stănescu A. Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret), *Tauber A-*

lexandru (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artile ie), *Urzică Aurel* (lic. Deva) şi *Weiss Leon* (lic. Galaţi).

Soluţiuni primite în ultimul timp dela d-nii: *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov) şi *Udrisky Traian* (lic. Arad).

Observare. D-l *Ştefănescu Emil* a mai stabilit identitatea:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{(1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2-(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2}{2(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

$$+2\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

231. — *Se cer patratele perfecte de patru cifre astfel ca prima cifră să fie suma ultimilor, două; iar diferenţa numărului format de primele două cifre şi a numărului format de ultimele două, să fie egală cu suma primei cifre cu a treia.*

RAUT C-TIN

Soluţie dată de d-nii: *Coşereanu Ion* (Şc. Polit. Timişoara) şi *I. N. Georgescu-Val* (Şc. de Artilerie).

Fie, $1000a+100b+10c+d$. numărul căutat. Conform enunţului, avem:

$$(1)\qquad a=c+d$$

$$(2)\qquad 10a+b-(10c+d)=a+c$$

Simplificând relaţia (2) şi ţinând seamă de (1), avem:

$$9(c+d)+b=11c+d$$

$$\overset{*}{**}\quad (3)\quad b=2(c-4d)$$

Din (3) citim că b este multiplu de 2; b poate fi deci: 0, 2, 4, 6, 8 şi ţinând seamă şi de (1) conchidem:

$$b=0,\quad c=4d\begin{cases}d=1,\ c=4,\ a=5\\ d=2,\ c=8,\ a=10,\end{cases}$$

$$b=2,\quad c=1+4d\begin{cases}d=1,\ c=5,\ a=6\\ d=2,\ c=9,\ a=11,\end{cases}$$

$$b=4,\ c=3+4d\begin{cases}d=1,\ c=6,\ a=7\end{cases}$$

$$b=6,\ c=3+4d\begin{cases}d=1,\ c=7,\ a=8\end{cases}$$

$$b=8,\ c=4+4d\begin{cases}d=1,\ c=8,\ a=9\end{cases}$$

Avem numerile 5041, 6251, 7461, 8671, 9881. Dintre acestea numai 5041 e patrat perfect: $5041=71^2$.

Alte soluţii date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Başta George* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Boconcea Kirilă* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Câlnicean I. Valeriu* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Cantacuzino I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Cazacincu A. V.* (lic. Naţional, Iaşi), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Comănescu Al. Bălteni* (Olt), *Creţoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *David Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Diaconu Gheorghe* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Ebner Arthur* (lic. Galaţi), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti). *Gianino Zaman* (lic. Milit. T.-Mureş), *Grigorescsu I.* (lic. M-rea Dealu), *Grofşorean I. G.* (lic. Arad), *Iliescu Dimo* (lic. Milit. Tg.-Mureş). *Iliescu E., Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (lic. Galaţi), *Katz S.* (lic. Botoşani), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Măcrineanu S.* (Galaţi), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mitescu D-tru* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Naghitză D.* (Chişinău), *Nicolescu Angelo* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Nicolescu P. Vasile* (lic. Milit.-Mureş), *Niculescu Isaia* (Mizil), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Dan* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rabinovici I.* (lic. Cetatea-Albă), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu) *Serghiev A. Ion* (lic. Chişinău), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti). *Solomon N.* (Şc. Polit. Timişoara), *Stănculescu George* (Piteşti), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Stoenescu Gh.* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Stroescu George* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Theodorescu Florin* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Vasiliu I.* (lic. M-rea Dealu), *Vlad F. Octavian* (Buzău), *Vişoianu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Weiss Leon* şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

Soluţiuni primite în ultimul timp dela d-nii: *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Horvat Pavel* (Orăştie), *Iulian Emil* (lic. Giurgiu), *Moroianu At.* (lic. Constanţa), *Propst Jean* (Şc. Polit. Timişoroa), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov) şi *Şuşelescu Ion* lic. M-rea Dealu),

241. — *O sferă şi un cub au acelaşi volum. 1. Se împart ambele volume în patru părţi egale prin câte două plane perpendiculare ce trec prin centru şi se compară câte o pătrime astfel obţinută, care are suprafaţa mai mare? 2. Sfera şi cubul având aceiaşi suprafaţă şi fiind împărţite ca mai sus în patru părţi egale, comparându-se câte o pătrime din fiecare, care are volumul mai mare?*

CAPITAN I. LINTES

Soluţie dată de d-nii: *David Gh.* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Harnagea Iorguţă* (lic. Huşi).

1. Fie r raza sferei și a latura cubului. Conform enunțului avem:

$$(1) \qquad \frac{4\pi r^3}{3} = a^3$$

Suprafața totală a sfertului de sferă, obținut prin două plane perpendiculare ce trec prin centrul sferei, este:

$$(2) \qquad s = \frac{4\pi r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi r^2.$$

Dacă ducem acum și prin centrul cubului două plane perpendiculare, ele intersectează baza după două drepte perpendiculare, care împart aria bazei în patru patrulatere egale. Aria totală a unuia din cele patru sferturi de cub, obțiuute prin planele duse, este egală cu perimetrul unuia din patrulaterele menționate multiplicată cu muchia a, plus dublul ariei unuia din aceste patrulatere.

Observăm însă că dintre toate sferturile de cub, acel care are o arie totală minimă, este acel obținut când planele perpendiculare ce trec prin centrul cubului, trec și prin mijloacele muchilor opuse, iar acel sfert de cub are o arie totală maximă, când e format din planele diagonale.

Ariile totale a sfertului de cub în cele două cazuri sunt respectiv:

$$(3) \qquad s_1 = 2a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2} \quad \text{și}$$

$$(4) \qquad s_2 = (a + a\sqrt{2})\,a + \frac{a^2}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\,a^2$$

Impărțind relațiunile (2) și (3), obținem:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{4\pi r^2}{5a^2}$$

Din (1) însă:

$$a = r\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$$

și atunci:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{4\pi r^2}{5r^2\sqrt[3]{\frac{16\pi^2}{9}}} = \sqrt[3]{\frac{64 \times 9\pi^3}{125 \times 16\pi^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{36\pi}{125}} < \sqrt[3]{\frac{36 \times 3.15}{125}} < 1,$$

ceiace dovedește că: *suprafața sfertului de sferă este mai mică decât a sfertului de cub.* Cum suprafețele totale ale sfertului de cub obținute prin ducerea oricum a celor două plane perpendiculare ce trec prin centrul cubului, rămân cuprinse între s_1 și s_2, concluzia subliniată se menține în toate cazurile:

2. Conform enunțului avem:

$$(5) \qquad 4\pi r^2 = 6a^2.$$

Volumul sfertului de sferă și a sfertului de cub obținute în condițiile enunțului, sunt respectiv:

$$v = \frac{\pi r^3}{3}$$

$$v_1 = \frac{a^3}{4}$$

Prin împărțire deducem:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{4\pi r^3}{3a^3}$$

Din (5) însă:

$$a = r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

și atunci:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{4\pi r^3}{3r^3\sqrt{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3}} = \frac{2 \times 3\sqrt{3}}{3\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} > 1,$$

ceiace dovedește că: *volumul sfertului de sferă este mai mare decât volumul sfertului de cub, obținute în condițiunile enunțului.*

Observare. 1. D-nii: *Bălean G.* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Bârglăzan A.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab, București), *Berdan C.* (Bârlad), *Comănescu Al.* (Olt), *Coșereanu Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *I. N. Georgescu-Val* (Călărași). *Gheorghiu C.* (Comănești), *Katz Pincu* (Galați), *Liotta Vincențiu* (Bârlad), *Mauriciu Ghelber* (Seminarul Pedagogic, București), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Popa P. Nicolae* (Constanța), *Percea Viorel* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Popovici Th. Ioan*, *Șerban I. Tiberiu* (lic. Brașov), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stambuleanu A.* (Șc. Polit., Timișoara), *Solomon Nicu* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Solomon Weiss* (lic. Galați), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic.

Mihai-Viteazul, București), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vasiliu Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara) și *Vasiliu V.* (Constanța), au ajuns la aceleași concluziuni, considerând numai cazul când sfertul de cub e format de planele perpendiculare ce trec prin centrul cubului și mijloacele muchilor de bază, și n'au cercetat toate cazurile cum s'au procedat mai sus, enunțul neimpunând această restricțiune.

2. D-l *Grofșorean I.* a stabilit concluziile din demonstrațiile de mai sus, luând exemple numerice.

250. — *Să se găsească un cub perfect de cinci cifre, astfel ca numărul format din ultimele două cifre, să întreacă cu zece unități numărul format din primele două cifre și să fie în același timp patratul cifrei a doua.*

I. N. GEORGESCU-VAL

Soluție dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu) și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

Fie $a\,b\,c\,d\,e$ cubul cerut. Din enunț avem:

$$d\,e = a\,b + 10 = b^2.$$

Din ultima egalitate rezultă că b^2 trebue să se termine cu b și să fie mai mare ca 10, deci nu poate fi decât 25 sau 36. Atunci $a\,b$ este 15 sau 26 și numărul cerut e de forma:

$$15\,c\,25 \quad \text{sau} \quad 26\,c\,36.$$

Rădăcina cubică a acestos numere fiind de două cifre, rezultă pentru cifra zecilor 2, iar a unităților respectiv 5 sau 6, adică rădăcinele cubice ale celor două numere pot fi 25 și 26.

Dar:

$$25^3 = 15625, \quad 26^3 = 17576.$$

Se vede că numai primul număr $15\,c\,25$ poate fi cub perfect, luând $c = 6$. Singura soluție este deci:

$$15625 = 25^3.$$

Alte soluții date de d-nii: *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Bârglăzan A. Beldie D-tru* (lic. R-Sărat), *Bercovici Emil* (lic. Matei Basarab, București), *Bercovici Sigismund* (Pitești), *Berdan C.* (Bârlad), *Cazacincu A. V.* (lic. Național, Iași), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută G.* (Timișoara), *Comănescu Al.* (Bălteni), *David Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Demetrescu George* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Diaconu Gh.* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Dumitrescu Gh. Marin* (lic. Craiova), *Epure T. Ștefan* (Buzău), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Garoafă G. Gheorghiu C.* (Comănești), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Gradin I. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Grigorescu Ion* (M-rea Dealu), *Grofșorean Gheorghe* (Arad), *Iliescu Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Iorguță P. Harnagea* (lic. Huși), *Katz Pincu* (Galați), *Katz S.* (lic, Botoșani), *Lăzărescu Fl. Șt.* (Giurgiu), *Marinescu M. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Miclescu Andrei* (Șc de Artilerie), *Nicolau P. Vasile* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Niculescu Isaiia* (Mizil), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Pârvulescu Titus* li)c. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Chr. I.* (lic. Galați), *Rădulet B. Remus* (Făgăraș), *Simionescu D. Gheorghe* (lic. M-r a Dealu), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei-Basarab, București), *Solomon Nicu* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Stefănescu Emil, Stroescu Gh.* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucuresti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Vlad Octavian* (Buzău).

Soluțiuni primite în ultimul timp dela d-nii: *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Cantacuzino I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Ghelber Mauriciu* (Seminarul Pedagogic, București), *Horvat Pavel* (Orăștie), *Iliescu Dan Grigore* (lic. M-rea Dealu), *Iulian Emil* (lic. Giurgiu), *Marian S.* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Musta Șt.* (lic. Timișoara), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu), *Rădulescu Titu* (lic. M-rea Dealu), *Serghiev A. Ion* (lic. Chișinău), *Silion Ion, Stănescu A. Nicolae* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Șușelescu Ion* (lic. M-rea Dealu). *Stamatiu Mihail* (abs. lic. Pitești), *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie) *Vișoianu I. Ion* (lic, M-rea Dealu), *Vlădronu Tiberiu* (lic. M-rea Dealu) și *Vlăduțu Sabin* (lic. M-rea Dealu).

257. — *Să se arate că în orice triunghiu dreptunghic exisăt relațiile:*

$$a + b + c = r + r_a + r_b + r_c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2$$

GRIGORE ZAPAN

Soluție dată de d-nii *Alexandrescu N.* (Ploești), *Beldie D-tru* (lic. R.-Sărat), *Dumitrescu Gh. Marin* (Slatina), *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Hartular Gheorghe, Mihăilescu T. Romeo, Nicolau Gh. C-tin* (R.-Sărat), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stănciulescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stănescu D.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Tărăbuță Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Tomescu Gheorghe* (Șc. de Artilerie).

Intr'un triunghiu oarecare, știm că există relațiile:

$$(1)\quad r = \frac{s}{p},\quad r_a = \frac{s}{p-a},\quad r_b = \frac{s}{p-b},\quad r_c = \frac{s}{p-c}$$

De aici deducem:

$$(2)\quad r + r_a + r_b + r_c = \frac{s\,(b+c)}{p\,(p-a)} + \frac{s\,.\,a}{(p-b)\,(p-c)}$$

$$r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=\frac{[p^2+(p-a)^2]s^2}{p^2(p-a)^2}$$

$$+\frac{[(p-b)^2+(p-c)^2]s^2}{(p-b)(p-c)}$$

Triunghiul fiind însă dreptunghic, avem:

$$b^2+c^2=a^2,\quad \frac{bc}{2}=s,$$

și atunci:

$$(3)\qquad p(p-a)=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4}=\frac{bc}{2}=s$$

$$(p-b)(p-c)=\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4}=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4}=\frac{bc}{2}=s$$

Relațiunile (2) se simplifică în virtutea relațiunilor (3) și devin:

$$r+r_a+r_b+r_b=b+c+a$$

$$r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2$$

$$=4p^2+a^2+b^2+c^2-2p(a+b+c)$$

$$=4p^2+a^2+b^2+c^2-4p^2=a^2+b^2+c^2$$

Relațiunile cerute sunt astfel stabilite.

A 2-a soluție dată de d-nii: *Adam M.* (Constanța), *Arcadian N.* (lic. Caracal), *Bercovici Emil* (lic. Matei-Basarab, București), *Giorănescu C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Cocorandu M.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Grofșoreanu Gh.* (Arad), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Mehlmann Theodor* (Câmpulung, Bucovina) *Niculescu Isaiia* (Mizil), *Popovici Th. Ioan*, *Simionescu D. Gh.* (M-rea Dealu) și *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

Fiindcă într'un triunghiu dreptunghic:

$$a=2R,\quad s=p(p-a),$$

relația cunoscută:

$$(4)\qquad r_a+r_b+r_c-r=4R,$$

se poate scri succesiv:

$$r+r_a+r_b+r_c=4R+2r=2\left(a+\frac{s}{p}\right)$$

$$=2(a+p-a)=a+b+c$$

Prima relațiune este astfel stabilită.

Pentru a doua, ridicăm la patrat relațiunea (4), avem:

$$(5)\quad r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2+2r_ar_b+2r_ar_c-$$

$$-2rr_a+2r_br_c-2rr_b-2rr_c=16R^2$$

Cum din relațiile (1) și (3) rezultă:

$$rr_a=\frac{s^2}{p(p-a)}=s,\quad r_br_c=\frac{s^2}{(p-b)(p-c)}=s,$$

$$rr_b=\frac{s^2}{(p-a)(p-b)},\quad r_ar_c=\frac{s^2}{(p-a)(p-c)},$$

$$rr_b=\frac{s^2}{p(p-b)},\quad rr_c=\frac{s^2}{p(p-c)}$$

$$r_ar_b-rr_b=\frac{s^2}{p-b}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right)=\frac{as}{p-b}$$

$$r_ar_c-rr_c=\frac{s^2}{p-c}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p}\right)=\frac{as}{p-c}$$

relațiunea (5) devine:

$$(6)\quad r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2+\frac{2as}{p-b}+\frac{2as}{p-c}=4(2R)^2=4a^2$$

Cum:

$$\frac{2as}{p-b}+\frac{2as}{d-c}=2a^2,$$

relațiuuea (6) devine

$$r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2=2a^2=a^2+b^2+c^2,$$

A doua relațiune este astfel stabilită.

A 3-a soluție dată de d-nii: *Blumenfeld David* (lic. Botoșani), *Mirescu Petre* (lic. Lazăr, București), *Stănescu A. Nicolae* (lic. Craiova) *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani) și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

Intr' un triunghiu dreptunghic avem: (Compléments de Trigonométrie, de „F. G. M."

$$r=p-a,\quad r_a=p,\quad r_b=p-c,\quad r_c=p-b$$

Adunând aceste relații avem:

$$r + r_a + r_b + r_c = 4p - (a+b+c) = a+b+c$$

Adunând aceleași relații ridicate la patrat avem:

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2$$

$$= (4p^2 + a^2 + b^2 + c^2) - 4p^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ceiace trebuia stabilit.

Alte soluții date de d-nii: *Bârglăzan A.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Berdan C.* (Bârlad), *Cazacincu V.* (lic. Național, Iași), *Epure T. Ștefan* (Buzău), *Gheorghiu C.* (Comănești) *Niculescu Isaiia* (Mizil), *Popovici Th. Ion, Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stefănescu Emil* și *Udrisky Traian* (lic. Arad).

Soluțiuni primite în ultimul timp dela d-nii: *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Coșniță Virgil* (lic. Bârlad), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Mironovici Virginia* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Rădulef B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Rădulescu P. Stelian* (lic. Giurgiu) și *Stănescu A. Nicu* (Șc. Polit. Timișoara).

260. — *Fie a b c un număr întreg de trei cifre. Să se afle restul diviziunii prin 91 a numărului.*

$$N = a\,b\,c\;a\,b\,c\;a\,b\,c \ldots a\,b\,c.$$

CAP. GR. ZAPAN

Soluțiune dată de d-nii: *Berdan C.* (Bârlad), *I. N. Georgescu-Val* (Călărași), *Grigorescu L. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galați), *Mușta St.* (lic. Timișoara), *Popescu Gr. Florian* (lic. Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu A. Nicolae* (Șc. Poiit. Timișoara), *Ștefan Bruno* (Șc. Polit. Timișoara), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

Dacă numărul N cuprinde n grupe $a\,b\,c$, putem scri:

$$N = a\,b\,c\;(1 + 1000 + 1000^2 + \ldots + 1000^{n-1})$$

Cum:

$$1000 = \text{mult. } 91 - 1, \text{ atunci } 1000^k = \text{mult. } 91 + (-1)^k,\ k = 1, 2, \ldots n-1,$$

și avem:

$$N = a\,b\,c\,\big[1 + \text{mult } 91 - 1 + \text{mult } 91 + 1 + \text{mult. } 91 - 1 + \ldots + \text{mult } 91 + (-1)^{n-1}\big]$$

Considerăm acum două cazuri:

1. Dacă n este par, atunci:

$$N = a\,b\,c \times \text{mult } 91 = \text{mult. } 91$$

2. Dacă n este impar, avem:

$$N = a\,b\,c \times (\text{mult. } 91 + 1) = \text{mult. } 91 + a\,b\,c$$

$$= \text{mult } 91 + (9a + 10b + c)$$

In acest caz restul lui N prin 91, este același ca al lui $a\,b\,c$ prin 91, adică este:

$9a + 10b + c$, când: $9a + 10b + c < 91$

zero, când: $9a + 10b + c = \text{mult } 91$

$9a + 10b + c - 91$, când: $9a + 10b + c > 91$.

Observare. D-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Diaconu Gh.* (lic. mil. Tg.-Mureș), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș) și *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu), au utilizat rezultatele din articolul „Două teoreme de aritmetică" a d-lui *Grigore Zapan*, din „G. M." vol. XXIV, 113—116.

D-l *Tauber Alexandru* a utilizat problema 2766 din „G. M." vol XXVI, pag. 79.

Soluțiuni primit în ultimul timp dela d-nii: *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu) și *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu).

271. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 4\,C_x^{y+1} = 5\,C_{x-1}^{y} \\ 2\,C_{x+1}^{y+1} = 3\,C_x^{y-1} \end{cases}$$

C *fiind simbolul combinărilor.*

I. COSEREANU

Soluțiune dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bârglăzan N. Aurel* (Șc. Polit., Timișoara), *Berdan C.* (Bârlad), *Botez St. Mihail* (student), *Dumitrescu C. Nicolae* (lic. Pitești), *Herșcovici Emanoil* (lic. Galați), *Ionescu Nicu* (Pitești), *Mihăilescu Romeu* (lic R.-Vâlcea), *Panaitescu I. Al.* (lic. Pitești), *Solacolu C. Șerban* (lic. Matei-Basarab, București), *Stambuleanu A.* (Șc. Polit., Timișoara), *Stănescu A. Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihal-Viteazul, București) și *Weiss Solomon* (lic. Galați).

In virtutea formulei combinărilor:

$$C_j^i = \frac{j(j-1):\ldots(j-i+1)}{i!}$$

sistemul dat devine:

$$\begin{cases} 4\dfrac{x(x-1)\ldots(x-y)}{(y+1)!} = 5\dfrac{(x-1)(x-2).,.(x-y)}{y!} \\ 2\dfrac{(x+1)x..(x-y+1)}{(y+1)!} = 3\dfrac{x(x-1).,.(x-y+2}{(y-1)!} \end{cases}$$

Simplificând factorii comuni, deducem:

$$\begin{cases} 4x = 5(y+1) \\ 2(x+1)(x-y+1) = 3y(y+1) \end{cases}$$

Inlocuind valoarea lui x din prima ecuațiune în a doua, găsim::

$$2\left(\frac{5y}{4}+\frac{5}{4}+1\right)\left(\frac{5y}{4}+\frac{5}{4}-y+1\right) = 3y(y+1)$$

$$\overset{*}{**} \quad (5y+9)(y+9) = 24y(y+1)$$

sau:

$$19y^2 - 30y - 81 = 0$$

$$\overset{*}{**} \quad y = \frac{15 \pm \sqrt{225+1539}}{19} = \frac{15 \pm 42}{19}$$

de unde:

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -\frac{27}{19}$$

Rezultă atunci:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{10}{19}$$

Singurul sistem de soluții compatibil cu enunțul este:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

PROBLEME PROPUSE

303. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca prima cifră să fie egală cu suma ultimelor două; iar prima mărită cu a treia, să fie egală cu a doua micșorată cu a treia.

CANTACUZINO I. ION

304. — Să se construiască un triunghiu cunoscând distanța O G, unghiul O A G și mediana vârfului A; O fiind centrul cercului circumscris, G punctul de intersecție al medianelor și A un vârf al triunghiului.

A. BARGLAZAN

305. — Fie A'B'C' triunghiul ortic al triunghiului A B C și a, b, c proecțiile vârfurilor A, B, C pe laturile B'C', C'A', A'B'. Să se demonstreze că dreptele A'a, B'b, C'c sunt concurente.

G. I. DUMITRESCU

306. — Să se stabilească identitatea:

$$n + 8\sum_{k=2}^{n}(k-1)(n-k+1) = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

V. ALACI

307. — Să se calculeze valoarea expresiunei:

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2^3}+\sqrt{\frac{1}{2^7}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{2^{2^n+2}-1}}}}}$$

DILI C. SCHILERU

308. — Să se determine α, astfel ca rădăcinele x_1, x_2 ale ecuației:

$$(3\alpha^2-4\alpha-3)x^2-(5\alpha^2-6\alpha-3)x-\alpha^2-\alpha+12=0$$

să satisfacă relațiunea:

$$\operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2-x_1x_2-4}$$

Să se rezolve apoi ecuația.

V. COSNITA

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

SIBIU

ANUL III. 15 IANUARIE 1924 NO. 11

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. STOENESCU AL. I. ASUPRA UNOR LIMITE
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 261, 273, 266.
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța că dela 15 August c. mai fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice următorii:

1, **Teodosiu Avram** Dr. în Matematici, Prof. la Academia de Agricultură și astronom la Universitate; **Arghir Iancu,** Prof. Tg.-Jiu; **Tino Ovidiu,** prof. lic. Șincai, București, str. Cornea 80; **Ghermănessu Mihail,** prof. lic. Cantemir, București, Roion 31.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** sub-directorul Școalei Politechnice din Timișoara.

ANUL III. — NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1924

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA UNOR LIMITE

de STOENESCU AL. I.
(lic. Cantemir, Bucureşti)

1. Fie de calculat limita expresiunei:

$$(1) \qquad u_n = \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)}{\varphi(n)}$$

pentru $n=\infty$, $f(n)$ şi $\varphi(n)$ fiind două polinoame în n, al căror termeni de gradul cel mai ridicat sunt respectiv.

$$A n^{\frac{m}{p}} \quad \text{şi} \quad B n^{\frac{m}{p}+1}$$

Inlocuind în (1) pe n prin $n+1$ obţinem:

$$(2) \qquad u_{n+1} = \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n+1)}{\varphi(n+1)}$$

Avem evident:

$$u_{n+1} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} u_n + \frac{f(n+1)}{\varphi(n+1)}$$

De unde, trecând la limită găsim:

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} u_{n+1} = \lim \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \lim u_n + \lim \frac{f(n+1)}{\varphi(n+1)}$$

Ţinând însă seama că

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \lim \frac{B n^{\frac{m}{p}+1}}{B n^{\frac{m}{p}+1}} = 1$$

şi

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(n+1)}{\varphi(n+1)} = \lim \frac{A n^{\frac{m}{p}}}{B n^{\frac{m}{p}+1}} = 0$$

obţinem din (3):

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} u_{n+1} = \lim u_n = u$$

Egalităţile (1) şi (2) ne dau

$$\varphi(n)\, u_n = f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$$

$$\varphi(n+1)\, u_{n+1} = f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+f(n+1)$$

de unde, prin scădere căpătăm:

$$\varphi(n+1)\, u_{n+1} - \varphi(n)\, u_n = f(n+1).$$

Trecând la limită şi având în vedere (4) deducem:

$$u = \lim_{n=\infty} \frac{f(n+1)}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$$

$$= \lim \frac{A(n+1)^{\frac{m}{p}}}{B(n+1)^{\frac{m}{p}+1} - B n^{\frac{m}{p}+1}}$$

$$(*) \qquad u = \frac{A}{B} \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)^{\frac{m}{p}}}{(n+1)(n+1)^{\frac{m}{p}} - n \cdot n^{\frac{m}{p}}}$$

Impărţind în fracţia din membrul al doilea şi numărătorul şi numitorul cu:

$$n(n+1)^{\frac{m}{p}}$$

avem:

$$u = \frac{A}{B} \lim_{n=\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{m}{p}}}$$

Aplicând criteriul lui Hôpital, găsim:

$$u = \frac{A}{B} \lim_{n=\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2} - \frac{m}{p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{m}{p}-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$$\overset{*}{**}\quad u=\frac{A}{B}\lim_{n=\infty}\frac{1}{1+\frac{m}{p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{m}{p}-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2}}$$

$$\overset{*}{**}\quad (5)\quad u=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{p}}=\frac{A}{B}\cdot\frac{p}{m+p}$$

Observația I. In cazul când gradul lui $\varphi(n)$ este egal sau mai mic decât gradul lui $f(n)$:

$$\lim_{n=\infty} u_n=\infty,$$

iar când gradul lui $\varphi(n)$ plus 1 este mai mare decât gradul lui $f(n)$:

$$\lim_{n=\infty} u_n=0$$

Pentru a demonstra aceasta, întrebuințăm un procedeu absolut identic.

Din cele de mai sus, însemnând cu An^q și Bn^r (q și r pot fi și fracționari) termenii cei mai ridicați ai lui $f(n)$ și $\varphi(n)$, formăm următorul tablou:

(6)

$q=r+1$	$u=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{r+1}$	$\frac{1}{u}=\frac{B}{A}(r+1)$
$q>r+1$	$u=\infty$	$\frac{1}{u}=0$
$q<r+1$	$u=0$	$\frac{1}{u}=\infty$

Aplicații. Pentru $f(n)=n^k$, $\varphi(n)=n^{k+1}$ suntem în cazul problemei 42, pag. 107 C. de P. de Algebră de d-l A. G. Ioachimescu. Făcând aceste subsituțiuni și remarcând că:

$$m=k,\ p=1,\ A=B=1$$

obținem:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

Luând $f(n)=n\sqrt[3]{n}$, $\varphi(n)=n^2\sqrt[3]{n}$ și ținând seama că în acest caz:

$$m=4,\ p=3,\ A=B=1$$

găsim:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+\ldots+n\sqrt[3]{n}}{n^2\sqrt[3]{n}}=\frac{3}{4+3}=\frac{3}{7}$$

(A se vedea probl. 66, pag. 7, No. 1, R. M. T. an. II, propusă de d-l N. Abramescu).

Punând

$$f(n)=n(n+1)\ldots(n+m-1),$$

$$\varphi(n)=n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$$

avem:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1.2\ldots(m-1)+2.3\ldots m+3.4\ldots(m+1)+\ldots+n(n+1)\ldots(n+m-1)}{n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}=\frac{1}{m+1}$$

2. In această a doua parte a lucrării, voi căuta să arăt, valoarea limitei mai generale:

$$(7)\quad u_n=\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)}$$

pentru $n=\infty$, $f(n)$ și $\varphi(n)$ fiind două polinoame în n, de același grad și având drept coeficienți ai termenilor cei mai ridicați cantitățile A și B.

Insemnând:

$$v_n=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$$

$$w_n=\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(n)$$

putem scrie:

$$(8)\qquad u_n=\frac{v_n}{w_n}\qquad u_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{w_{n+1}}$$

In mod cu totul analog ca în prima parte a articolului și luând în considerare (6) se deduce:

$$(9)\qquad \lim_{n=\infty} u_n=\lim u_{n+1}=u$$

Din (8) căpătăm:

$$w_n u_n=v_n\qquad w_{n+1}u_{n+1}=v_{n+1}$$

De unde:

$$w_{n+1}u_{n+1}-w_n u_n=v_{n+1}-v_n=f(n+1)$$

Trecând la limită și observând (9):

(10) $$u = \lim_{n=\infty} \frac{f(n+1)}{w_{n+1} - w_n} = \lim_{n=\infty} \frac{f(n+1)}{\varphi(n+1)} = \frac{A}{B}$$

Aplicație. Fie:

$$f(n) = n^k,\ \varphi(n) = n(n+1)\dots(n+k-1).$$

Vom avea:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{1.2\dots(k-1) + 2.3\dots k + \dots + n(n+)\dots(n+k-1)} = 1$$

Observația II-a. Egalitățile (4) și (9) sunt aproape evidente prin ele însele, așa încât s'ar putea dispensa de demonstrațiunile ce le preced, totuși am dat aceste demonstrațiuni pentruca soluția să fie cât se poate de riguroasă.

3. Să considerăm seria al cărui termen general este:

$$u_n = \varphi(n)$$

In cunoscuta relație:

(11) $$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

făcând această înlocuire obținem principala limită:

(12) $$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\varphi(n)} = \lim_{a=\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n} = 1.$$

Aplicație. Pentru $\varphi(n) = n$ avem:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(A se vedea probl. 39, pag. 107, C. de P. de Algebră de d-l A. G. Ioachimescu).

4. Pornind dela relația:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim \frac{u_n}{v_n}$$

și luând: $u_n = f(n)\sqrt[n]{\varphi(n)}$ $\quad v_n = F(n)$

în cari $f(n)$ și $F(n)$ sunt două polinoame de gradul m, A și B fiind coeficienții termenilor în m, putem scrie:

$$u = \lim_{n=\infty} \frac{f(n)\sqrt[n]{\varphi(n)} - f(n-1)\sqrt[n-1]{\varphi(n-1)}}{F(n) - F(n-1)}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{f(n)\sqrt[n]{\varphi(n)}}{F(n)}$$

(13) $$u = \lim_{n=\infty} \frac{f(n)}{F(n)} \cdot \lim_{n=} \sqrt[n]{\varphi(n)} = \frac{A}{B}$$

Foarte ușor, formăm tabloul următor, q și r reprezentând gradul lui $f(n)$ și $F(n)$.

$q = r$	$u = \frac{A}{B}$
$q > r$	$u = \infty$
$q < r$	$u = 0$

Aplicație. Pentru $f(n) = n$, $\varphi(n) = n$, $F(n) = n$, găsim:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n\sqrt[n]{n} - (n-1)\sqrt[n-1]{n-1}}{n - (n-1)} = \lim \frac{n\sqrt[n]{n}}{n}$$

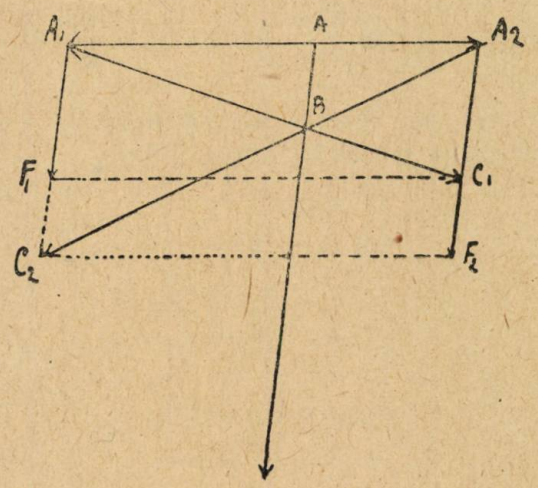
$$\lim_{n=\infty} \left[n\sqrt[n]{n} - (n-1)\sqrt[n-1]{n-1} \right] = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Observația III-a. A se avea întotdeauna în vedere, în toate aplicațiunile faptul că $f(n)$, $F(n)$, $\varphi(n)$ sunt polinoame de grad finit, cu un număr finit de termeni.

NOTE MATEMATICE

Asupra compunerii a două forțe paralele. Problema aceasta este tratată de obicei în Statica elementară cu ajutorul unei construcțiuni de forțe suplimentare, care are un caracter cam artificial. Iată o metodă de găsirea rezultantei făcând uz de cât mai puține linii ajutătoare.

Fie F_1 și F_2 cele două forțe paralele aplicate respectiv în A_1 și A_2. Pentru a le compune în una singură, voi aplica în lungul dreptei A_1A_2 două forțe egale și de sens contrariu, ceiace nu schimbă starea mecanică a sistemului rigid. Voiu aplica anume în A_1 o forță reprezentată în mărime, direcție și sens prin segmentul A_1A_2, iar în A_2 forța A_2A_1. Rezultanta A_1C_1 a forțelor aplicate în A_1 va întâlni rezultanta A_2C_2 a forțelor din A_2 în



punctul B care va aparține evident rezultantei totale căutate. Dacă mai observăm că rezultantele A_1C_1 și A_2C_2 prin compunere pierd forțele A_1A_2 în cele două sensuri, atunci găsim imediat că rezultanta va avea direcția și sensul comun al forțelor F_1 și F_2 iar mărimea egală cu F_1+F_2, în cât punctul A de aplicație rezultă imediat.

Proprietatea lui de împărțire a segmentului A_1A_2:

$$\frac{A_1A}{F_2}=\frac{A_2A}{F_1}=\frac{A_1A_2}{F_1+F_2}$$

se găsește ușor din asemănarea triunghiurilor AA_1B, $A_2A_1C_1$ deoparte și AA_2B, A_2A_1C dealta.

Procedeul se extinde fără greutate la cazul a două forțe paralele de sensuri opuse.

V. VALCOVICI

O generalizare.

Imi propun ca în câteva rânduri să generalizez chestiunea a treia propusă la lucrarea scrisă la geometrie dela examenul de admitere la Șc. Polit. Timișoara. Chestiunea era următoarea: *Fie un triunghiu* ABC *înscris într'un cerc; fie* G *punctul de întâlnire al medianelor sale; dreapta* AG *taie cercul în* D. *Să se demonstreze că:*

$$9AG.GD=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2.$$

Inlocuiesc G cu un punct oarecare ale cărui coordonate baricentrice sunt: α, β, γ. Punctul D fiind punctul unde AG taie cercul ABC, îmi propun să găsesc valoarea expresiunei:

$$E=AG.GD=AG(GA'+A'D)$$

A' fiind punctul unde AG taie latura BC.

Teorema lui *Van Aubel* dă

$$\frac{AG}{GA'}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha} \quad *_{**} \quad (1)\ AG=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}AA'$$

și (2) $GA'=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}AA'$. Dreptele AD și BC sunt coarde care se taie în cercul ABC

$$*_{**}\ AA'.A'D=A'BA'C \quad *_{**} \quad (3)\ A'D=\frac{A'B.A'C}{AA'}$$

Insă din $\frac{A'B}{A'C}=\frac{\gamma}{\beta}$ deducem A'B și A'C și înlocuind în (3) devine (4) $\frac{\beta\gamma\overline{BC}^2}{\overline{AA'}(\beta+\gamma)}$ E devine ținând seama de (1, 2, 4)

$$E=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{AA'}^2+\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\overline{BC}^2\right]$$

Când G este punctul de întâlnire al medianelor, $\alpha=\beta=\gamma$

$$*_{**}\quad E=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overline{AA'}^2+\frac{1}{4}\overline{BC}^2\right),$$

însă $AA'=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{2}-\frac{\overline{BC}^2}{4}$ deci,

Inlocuind, avem $E=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2}{9}$

$$9AG.GD=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

Urmând aceiași metodă putem găsi relații analoage anume expresiunile GA'.A'D și AG.A'D

DILI C. SCHILERU

O relație cu aplicații într'un triunghiu. Fie ABC un triunghiu oarecare și AA', BB', CC' trei ceviene care concură într'un punct O.

In cele ce urmează îmi propun să calculez relația:

$$(1)\quad \frac{\overline{AO}.\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2}+\frac{\overline{BO}.\overline{OB'}}{\overline{BB'}^2}+\frac{\overline{CO}.\overline{OC'}}{\overline{CC'}^2}$$

apoi particularizând cevienele, în ceviene concurente în diferite puncte remarcabile ale triunghiului A B C, formând o serie de relaţiuni deduse ca aplicaţii din relaţia (1).

Fie α, β, γ coordonatele baricentrice ale punctului O, conform teoremei lui *Van Aubel* vom avea:

*** $\frac{AO}{OA'} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$ aplicând proprietatea proporţiunilor

(2) $\frac{AO}{AA'} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$, (3) $\frac{OA'}{AA'} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Imulţind (2) cu (3) avem

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} = \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$

Prin analogie se deduce şi ceilalţi termeni ai relaţiunei (1) care se poate scrie acum:

(4) $$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} + \frac{\overline{BO}\cdot\overline{OB'}}{\overline{BB'}^2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OC'}}{\overline{CC'}^2} = \frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Dacă punctul O coincide cu centru de greutate al triunghiului A B C atunci avem ţinând seama de (4) şi de $\alpha=\beta=\gamma$.

$\sum \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} = \frac{2}{3}$; Dacă punctul O coincide cu centrul cercului înscris, avem ţinând seama de:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

$$\sum \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} = \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)} = \frac{ab+bc+ca}{2p^2}$$

Dacă punctul O coincide cu centru cercului circumscris, avem ţinând seama de:

$$\frac{\alpha}{a\cos A} = \frac{\beta}{b\cos B} = \frac{\gamma}{c\cos C}$$

$$\sum \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} = \frac{2(ab\cos A\cos B + bc\cos B\cos C + ca\cos C\cos A}{(a\cos A + b\cos B + c\cos C)^2}$$

Dacă punctul O coincide cu ortocentru atunci avem ţinând seama de:

$$\frac{\alpha}{a\cos B\cos C} = \frac{\beta}{b\cos C\cos A} = \frac{\gamma}{c\cos A\cos B}$$

(5) $$\sum \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} = \frac{2(ab\cos A\cos B\cos^2 C + bc\cos B\cos C\cos^2 A + ca\cos C\cos A\cos^2 B)}{(a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B)^2} =$$

$$\frac{2\cos A\cos B\cos C(ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B)}{(a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B)^2} = \frac{2\cos A\cos B\cos C(a^2+b^2+c^2)}{(a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B)^2}$$

Dar $AO\cdot OA' = 4R^2\cos A\cos B\cos C$

şi ţinând seama de (5) putem scrie

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2R^2(a\cos B\cos C + b\cos C\cos A + c\cos A\cos B)}$$

ând punctul O coincide cu punctul lui *Limoyne* ıvem ţinând seama de $\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2}$

$$\sum \frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} = \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2} \text{ etc.}$$

Acum cu ajutorul relaţiei (1) să rezolvăm următoarea problemă:

Fie O un punct în planul unui triunghiu ABC. *Dreptele* OA, OB, OC *taie laturile corespunzătoare respectiv în* A', B', C'. *Să se găsească locul geometric al punctului* O *ştiind că:*

(6) $$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{OA'}}{\overline{AA'}^2} + \frac{\overline{BO}\cdot\overline{OB'}}{\overline{BB'}^2} + \frac{\overline{CO}\cdot\overline{OC'}}{\overline{CC'}^2} = 0.$$

Din relaţia (4) deducem numai decât locul, anulând relaţia

$\frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$ adică: $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$

care este elipsa lui *Steiner*, circumscrisă triunghiului A B C al cărui centru, este centru de greutate al triunghiului. In general putem egala cu o constantă relaţia (6) iar locul e o conică.

D LI C. SCHILERU
(Şc. Politechnică Timişoara)

BIBLIOGRAFIE

1. *Societatea Română de Ştiinţe.* Buletinul de Ştiinţe Matematice pure şi aplicate, anul XXVI, Ianuarie-Iunie 1923, N-rile 1-3, cuprinde: Le centenaire de *Charles Hermite*, par *G. Tzitzeica.* Scalaires, vecteurs, tenseurs par *Trajan Lalesco.* Problémes relatifs à la monogénéite, par *D. Pompeiu.* Procesele-verbale ale şedinţelor „Societăţei Române de Ştiinţe" din 12 Iunie, 26 Iunie, 3 Iulie, 10 Iulie, 6 Noemvrie, 20 Noemvrie şi 4 Decemvrie, ţinute sub presidenţia d-lui *Traian Lalescu.*

2. *Gazeta Matematică*, anul XXIX, No. 4, Decemvrie 1923. Câteva date asupra lui *Simion Marcu* zis *Marcovici* ca profesor de matematică, de *Tr. Lalescu.* Rezolvarea unui sistem de ecuaţii de Ing. *N. Kaufmann.*

3. *Jurnal Matematic*, vol. I, No. 1, 1 Ianuarie 1924, apare lunar litografiat, de d-l *Tiberiu Popovici* din *Arad.* Cuprinde: Cuvânt înainte, de T. P. Asupra unor ceviene într'un triunghiu, de *Tib. Popovici.* Note, probleme propuse, informaţiuni. Abonamentul 20 lei anual, a se adresa d-lui *Tr. Udrisky, Bulevardul Ferdinand 8, Arad.*

4. *N. Abramescu.* Su una classe di serie di polinomi di una variabili complessa. (Estratto dal. vol. XXXI, Reale Accademia Nazionale dei *Lincei*, 5 Febbraio, 1923).

5. *N. Abramescu.* Su una classe di serie di diplomi di una variabile complessa. (Estratto dal. vol. XXXI, 19 marzo 1922.

6. *P. Sergesco.* Sur la distribution des valeurs caractéristique des noyaux de *Marty* $N(x, y) = A(x) K(x, y)$. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 17 septembre 1923).

PROBLEME REZOLVATE

261. — *Răsturnatul produsului a două numere de două cifre, este produsul răsturnatelor celor două numere. Care sunt acele numere ştiind că produsul celor două numere, este de trei cifre.*

EMIL ŞTEFANESCU

Fie $10a+b$ şi $10c+d$, numerile de două cifre cerute. Produsul lor fiind de trei cifre este de forma, $100s+10z+u$.

Conform enunţului, avem:

$$(10a+b)(10c+d) = 100s+10z+u$$
$$(10b+a)(10d+c) = 100u+10z+s,$$

unde a, b, c, d, s, z, u sunt de o singură cifră însemnătoare, b, d, z şi u putând fi şi zero.

Din prima relaţie deducem că produsul bd trebuie să se termine cu u, deci:

$$(1) \qquad bd \geqq u.$$

Din a doua relaţie deducem:

$$(2) \qquad bd \leqq u,$$

şi atunci din (1) şi (2) rezultă:

$$(3) \qquad u = bd.$$

Acelaşi raţionament ne permite a deduce că:

$$(4) \qquad s = ac.$$

Valorile lui u şi s din (3) şi (4) introdu-se în una din relaţiile de mai sus, ne conduce la relaţia:

$$(5) \qquad z = ad+bc.$$

Trebuie să alegem pentru a, b, c şi d numere de o singură cifră însemnătoare. care să ne dea pentru s, z, u date de (4), (5), (3) numere de o singură cifră, b, d, z şi u putând fi şi zero.

Pentru $s=1$, *putem lua:* $a=1$, $c=1$, *în care caz:*

$$u = bd, \quad z = b+d.$$

Pentru b şi d, putem lua perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 7; 1, 8; 2, 0; 2, 1; 2, 2; 2, 3; 2, 4; 3, 0, 3, 1; 3, 2; 3, 3; 4, 0; 4, 1; 4, 2; 5, 0; 5, 1; 6, 0; 6, 1; 7, 0; 7, 1; 8, 0; 8, 1; 9, 0.

In acest caz perechile de numere care satisfac enunţul, sunt:

10, 10; 10, 11; 10, 12; 10, 13; 10, 14; 10, 15; 10, 16; 10, 17; 10, 18; 10, 19; 11, 10; 11, 11; 11, 12; 11, 13; 11. 14; 11, 15; 11, 16; 11, 17;

11, 18; 12, 10; 12, 11; 12, 12; 12, 13; 12, 14; 13, 10; 13, 11; 13, 12; 13, 13; 14, 10; 14, 11; 14, 12; 15, 10; 15, 11; 16, 10; 16, 11; 17, 10; 17, 11; 18, 10; 18, 11; 19, 10.

Avem astfel 22 de soluții distincte, soluțiile subliniate nesocotindu-le fiindcă de exemplu 10, 11; și 11, 10 nu le putem socoti ca două soluții distincte.

Pentru $s=2$, *putem lua:* $a=1$, $c=2$; *sau:* $a=2$, $c=1$, *în care cazuri*

$$\begin{matrix} u=b\,d \\ z=d+2\,b \end{matrix} \quad \text{sau,} \quad \begin{matrix} u=b\,d \\ z=2\,d+b \end{matrix}$$

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=1$, $c=2$ perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 7; 2, 0; 2, 1; 2, 2; 2, 3; 2, 4; 3, 0; 3, 1; 3, 2; 3, 3; 4, 0; 4, 1.

Pentru b și d, putem lua, în cazul $a=2$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 0; 2, 1; 2, 2; 2, 3; 3, 0; 3, 1; 3, 2; 3, 3; 4, 0; 4, 1; 4, 2; 5, 0; 5, 1; 6, 0; 6, 1; 7, 0; 7, 1; 8, 0; 9, 0.

In acest caz perechile de numere care satisfac enunțul, sunt:

10, 20; 10, 21; 10, 22; 10, 23; 10, 24; 10, 25; 10, 26; 10, 27; 10, 28; 10, 29; 11, 20; 11, 21; 11, 22: 11, 23; 11, 24; 11, 25; 11, 26; 11, 27; 12, 20; 12, 21; 12, 22; 12, 23; 12, 24; 13, 20; 13, 21; 13, 22; 13, 23; 14, 20; 14, 21; 20, 10; 20, 11; 20, 12; 20, 13: 20, 14; 21, 10; 21, 11; 21, 12; 21, 13; 21, 14; 22, 10; 22, 11; 22, 12; 22, 13; 23, 10; 23, 11; 23, 12; 23, 13; 24, 10; 24, 11; 24, 12; 25, 10; 25, 11; 26, 10; 26, 11; 27, 10; 27, 11; 28, 10; 29, 10.

Avem încă 29 soluții distincte.

Pentru $s=3$, *putem lua:* $a=1$, $c=3$, *sau:* $a=3$, $c=1$, *în care cazuri:*

$$\begin{matrix} u=b\,d \\ z=d+3\,b \end{matrix} \quad \text{sau,} \quad \begin{matrix} u=b\,d \\ z=3\,d+b \end{matrix}$$

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=1$, $c=3$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 2, 0; 2, 1; 2, 2: 2, 3; 3, 0

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=3$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 2, 0; 2, 1; 2, 2; 3, 0; 3, 1; 3, 2; 4, 0; 4, 1; 5, 0; 5, 1; 6, 0: 6, 1; 7, 0; 8, 0; 9, 0.

In acest caz perechile de numere care satisfac enunțul, sunt:

10, 30; 10, 31; 10, 32; 10, 33; 10, 34; 10, 35; 10, 36; 10, 37; 10, 38; 10, 39; 11, 30; 11, 31; 11, 32; 11, 33; 11, 34; 11, 35: 11, 36; 12, 30; 12, 31; 12, 32: 12, 33; 13, 30; 30, 10; 30, 11: 30, 12; 30, 13; 31, 10; 31, 11; 31, 12; 32, 10; 32, 12; 32, 12; 33, 10; 33, 11; 33, 12; 34, 10; 34, 11; 35, 10; 35, 11; 36, 10; 36, 11; 37, 10; 38, 10; 39, 10.

Avem încă 22 soluțiuni distincte.

Pentru $s=4$, *putem lua:* $a=1$, $c=4$; $a=2$, $c=2$; $a=4$, $c=1$, *în care cazuri.*

$$\begin{matrix} u=b\,d \\ z=d+4\,b, \end{matrix} \quad \begin{matrix} u=b\,d \\ z=2\,d+2\,b \end{matrix} \quad \text{sau,} \quad \begin{matrix} u=b\,d \\ z=4\,d+b \end{matrix}$$

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=1$, $c=4$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 2, 0; 2, 1.

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=2$, $c=2$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 2, 0; 2, 1; 2, 2; 3, 0; 3, 1; 4, 0.

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=4$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 2, 0; 2, 1; 3, 0; 3, 1; 4, 0; 4, 1; 5, 0; 5, 1; 6, 0; 7, 0; 8, 0; 9, 0.

In acest caz, perechile de numere care satisfac enunțul, sunt:

10, 40; 10, 41; 10, 42; 10, 43; 10, 44; 10, 45; 10, 46; 10, 47; 10, 48; 10, 49; 11, 40; 11, 41; 11, 42; 11, 43; 11, 44; 11, 45; 12, 40; 12, 41; 20, 20; 20, 21; 20, 22; 20, 23; 20, 24; 21, 20; 21, 21; 21, 22; 21, 23; 22, 20; 22, 21; 22, 22; 23, 20; 23, 21; 24, 20; 40, 10; 40, 11; 40, 12; 41, 10; 41, 11; 41, 12; 42, 10; 42, 11; 43, 10; 43, 11; 44, 10; 44, 11; 45, 10; 45, 11; 46, 10; 47, 10; 48, 10; 49, 10.

Avem încă 27 soluții distincte.

Pentru $s=5$, *putem lua:* $a=1$, $c=5$, *sau,* $a=5$, $c=1$, *în care cazuri,*

$$u=bd \qquad z=d+5b$$

sau

$$u=bd \qquad z=5d+b$$

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=1$, $c=5$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4.

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=5$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1; 2, 0; 2, 1; 3, 0; 3, 1; 4, 0; 4, 1; 5, 0; 6, 0; 7, 0; 8, 0; 9, 0.

In acest caz perechile de numere care satisfac enunțul, sunt:

10, 50; 10, 51; 10, 52; 10, 53; 10, 54; 10, 55; 10, 56; 10, 57; 10, 58; 10, 59; 11, 50; 11, 51; 11, 52; 11, 53; 11, 54; 50, 10; 50, 11; 51, 10; 51, 11; 52, 10; 52, 11; 53, 10; 53, 11; 54, 10; 54, 11; 55, 10; 56, 10; 57, 10; 58, 10; 59, 10.

Avem încă 15 soluții distincte.

Pentru $s=6$, *putem lua:* $a=1$, $c=6$; $a=2$, $c=3$; $a=3$, $c=2$; $a=6$, $c=1$, *în care cazuri.*

$$u=bd \qquad z=d+6b,$$

$$u=bd \qquad z=2d+3b,$$

$$u=bd \qquad z=3d+2b,$$

sau

$$u=bd \qquad z=6d+b.$$

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=1$, $c=6$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3.

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=2$, $c=3$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 2, 0; 2, 1; 3, 0.

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=3$, $c=2$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 2, 0; 2, 1; 3, 0; 3, 1; 4, 0.

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=6$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1; 2, 0; 2, 1; 3, 0; 3, 1; 4, 0; 5, 0; 6, 0; 7, 0; 8, 0; 9, 0.

In acest caz perechile de numere, care satisfac enunțul, sunt:

10, 60; 10, 61; 10, 62; 10, 63; 10, 64; 10, 65; 10, 66; 10, 67; 10, 68; 10, 69; 11, 60; 11, 61; 11, 62; 11, 63; 20, 30; 20, 31; 20, 32; 20, 33; 20, 34; 21, 30; 21, 31; 21, 32; 21, 33; 22, 30; 22, 31; 23, 30; 30, 20; 30, 21; 30, 22; 30, 23; 31, 20; 31, 21; 31, 22; 32, 20; 32, 21; 33, 20; 33, 21; 34, 20; 60, 10; 60, 11; 61, 10; 61, 11; 62, 10; 62, 11; 63, 10; 63, 11; 64, 10; 65, 10; 66, 10; 67, 10; 68, 10; 69, 10.

Avem încă 26 soluții distincte.

Pentru $s=7$, *putem lua*, $a=1$, $c=7$, *sau*, $a=7$, $c=1$, *în care cazuri:*

$$u=b\,d \qquad u=b\,d$$
$$z=d+7\,b \quad \text{sau,} \quad z=7\,d+b.$$

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=1$, $c=7$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1; 1, 2.

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=7$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1; 2, 0; 2, 1; 3, 0; 4, 0; 5, 0; 6, 0; 7, 0; 8, 0; 9, 0.

In acest caz perechile de numere, care satisfac enunțul, sunt:

10, 70; 10, 71; 10, 72; 10, 73; 10, 74; 10, 75; 10, 76; 10, 77; 10, 78; 10, 79; 11, 70; 11, 71; 11, 72; 70, 10; 70, 11; 71, 10; 71, 11; 72, 10; 72, 11; 73, 10; 74, 10; 75, 10; 76, 10; 77, 10; 78, 10; 79, 10.

Avem încă 13 soluții distincte.

Pentru $s=8$, *putem lua:* $a=1$, $c=8$; $a=2$, $c=4$; $a=4$, $c=2$; $a=8$, $c=1$, *în care cazuri.*

$$u=b\,d \qquad u=b\,d$$
$$z=d+8\,b, \quad z=2\,d+4\,b,$$
$$u=b\,d \qquad u=b\,d$$
$$z=4\,d+2\,b, \quad \text{sau,} \quad z=8\,d+b.$$

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=1$, $c=8$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0; 1, 1.

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=2$, $c=4$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 2, 0.

Pentru b și d, putem lua în cazul, $a=4$, $c=2$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 1, 0; 1, 1; 2, 0; 2, 1; 3, 0; 4, 0.

Pentru b și d, putem lua în cazul $a=8$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1; 2, 0; 3, 0; 4, 0; 5, 0; 6, 0; 7, 0; 8, 0; 9, 0.

In acest caz perechile de numere care satisfac enunțul, sunt.

10, 80; 10, 81; 10, 82; 10, 83; 10, 84; 10, 85; 10, 86; 10, 87; 10, 88; 10, 89; 11, 80; 11, 81; 20, 40; 20, 41; 20, 42; 20, 43; 20, 44; 21, 40; 21, 41; 21, 42; 22, 40; 40, 20; 40, 21; 40, 22; 41, 20; 41, 21; 42, 20; 42, 21; 43, 20; 44, 20; 80, 10; 80, 11; 81, 10; 81, 11; 82, 10; 83, 10; 84, 10; 85, 10; 86, 10; 87, 10; 88, 10; 89, 10.

Avem încă 21 soluții distincte.

Pentru $s=9$, *putem lua:* $a=1$, $c=9$; $a=3$, $c=3$; $a=9$, $c=1$, *în care cazuri*

$$u=b\,d \qquad u=b\,d \qquad u=b\,d$$
$$z=d+9b, \quad z=3\,d+3\,b, \quad \text{sau,} \quad z=9\,d+b.$$

Pentru b și d, putem lua, în cazul $a=1$, $c=9$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1, 0.

Pentru b și d, putem lua, în cazul $a=3$, $c=3$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 1, 0; 1, 1; 1, 2; 2, 0; 2, 1; 3, 0.

Pentru b și d, putem lua, în cazul $a=9$, $c=1$, perechile de numere:

0, 0; 0, 1; 1, 0; 2, 0; 3, 0; 4, 0; 5, 0; 6, 0; 7, 0; 8, 0; 9, 0.

In acest caz perechile de numere, care satisfac enunțul sunt:

10, 90; 10, 91; 10, 92; 10, 93; 10, 94; 10, 95; 10, 96; 10, 97; 10, 98; 10, 99; 11, 90; 30, 30; 30, 31; 30, 32; 30, 33; 31, 30; 31, 31; 31, 32; 32, 30; 32, 31; 33, 30; 90, 10; 90, 11; 91, 10; 92, 10; 93, 10; 94, 10; 95, 10; 96, 10; 97, 10; 98, 10; 99, 10.

Avem încă 17 soluții distincte.

In total problema admite:

$22+29+22+27+15+26+13+21+17=192,$

soluții distincte

Soluții necomplecte date de d-nii: *Bârglăzan Aurel* (53 soluții), *Beldie N. Dumitru* (3 soluții), *Braiester I. Otto* (o soluție), *Comănescu Al.* (42 soluții), *Diaconu Gh.* (5 soluții), *Feneşan Iancu* (o soluție), *Grofşorean Gh.* (35 soluții), *Neştian Gh.* (8 soluții), *Popescu N. Corneliu* (10 soluții), *Popovici Chr. Jean* (o soluție), *Rădulescu Titu* (173) soiuții) *Simionescu Gh.* (35 soluții), *Tomescu Gh.* (5 soluții) și *Vasiliu C. Ion* (34 soluții).

273. — *Să se demonstreze că expresiunea;*

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4)$$

este divizibilă prin, $x+y+z$, *și să se afle câtul.*

TR. LALESCU

Soluție dată de d-nii: *Bălean Gh.* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Cândea Gh. Ioan* (lic. Sibiu), *Constantinescu Gh. Ioan* (lic. Chişinău), *Creţoiu A.* (Bucureşti), *Mihăilescu T. Romeo* (R.-Vâlcea), *Musta Şt.* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Popescu Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Grigore* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan, Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Smigelschi Octavian, Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănculescu I. C-tin* (lic. Giurgiu), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tomescu N. Gheorghe* (Şc. de Artilerie) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

Insemnând cu E expresiunea dată și căutând s'o descompunem în factori, putem scri succesiv

$$E=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$$
$$=4y^2z^2-(x^2-y^2-z^2)^2=$$
$$(2yz+x^2-y^2-z^2)(2yz-x^2+y^2+z^2)$$
$$=[x^2-(y-z)^2][(y+z)^2-x^2]=$$
$$(x+y-z)(x-y+z)(y+z+x)(y+z-x).$$

E clar acum că expresiunea dată se divide cu $x+y+z$, iar câtul este:

$$(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x).$$

A 2-a soluție dată de d-nii: *Botea N.* (lic. Cantemir, București), *Ciorănescu I. C.* (lic. M-rea Dealu), *Ciută G.* (Timişoara), *Comănescu Al.* (Olt), *I. N. Georgescu-Val* (Subloc. Giurgiu), *Gheorghiu G. Olimpia* (Tulcea), *Iscovici I. J.* (Piteşti), *Katz Pincu* (Galaţi), *Mititelu Gh.* (Bacău), *Panaitescu I. Al.* (lic. Piteşti), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei-Basarab, București), *Stamatescu I. Val.* (Seminarul Pedagogic, București), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Stambuleanu Adrian* (Şc. Polit. Timişoara), și *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani).

Pentru $x=-(y+z)$ expresiunea dată e nulă, fiindcă avem succesiv:

$$E=[(y+z)^2+y^2+z^2]^2-2[(y+z)^4+y^4+z^4]$$
$$=4(y^2+z^2+yz)^2-$$
$$4(y^4+z^4+2y^3z+2yz^3+3y^2z^2\equiv 0,$$

ceiace dovedește că expresiunea dată e divizibilă cu $x+y+z$.

Pentru a afla câtul, observăm că expresiunea dată de gradul al 4-lea fiind simetrică și omogenă, iar $x+y+z$ fiind simetric și omogen de gradul întâi, câtul va fi și el simetric și omogen de gradul al 3-lea. (Articolul d-lui *Tr. Lalescu*, din „R. M. T." an. III, pag. 83) și putem scri:

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^4+y^4+z^4)$$
$$\equiv(x+y+z)[a(x^3+y^3+z^3)+$$
$$b(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2+x^2z)+cxyz$$

Pentru $x=1$, $y=1$, $z=0$. obținem:

$$a=-1.$$

Pentru $x = y = 1$, $z = 0$, obținem:

$$0 = 2(2a + 2b) = 2(-2 + 2b)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad b = 1$$

Pentru $x = y = z = 1$, avem:

$$3 = 3(3a + 6b + c) = 3(-3 + 6 + c)$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad c = -2.$$

Câtul este astfel:

$$-(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 y + x y^2 + y^2 z + y z^2 + x z^2 + x^2 z) - 2 x y z$$

Alte soluțiuni date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bârglăzan N. Aurel* (Timișoara). *Bercovici A. Emil, Berardo N. Bernardis* ((lic. R.-Sărat), *Iliescu Emil, Ionescu Th. Bujor* (lic. Cantemir, București) și *Samoilă D-tru.*

In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-lii: *Atanasiu I. D-tru* (lic. Huși), *Berdan C.* (Bârlad), *Grofșorean I. Gheorghe, Herman Avram* (lic. Focșani), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Petrescu A. Gh.* (lic. Ploești), *Propst J* (Șc. Polit. Timișoara), *Taroș Vasile* (lic. Brașov).

266. — *Să se verifice identitatea;*

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{(x+1)(x^2+1)(x^3-1)}$$

M. BOBARNAC

Putem scri succesiv:

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{x^3-1}{x^3+1} = \frac{x-1}{x+1}\left(1 - \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)$$

$$+ \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{-2x(x-1)}{x^3+1} + \frac{x^2-1}{x^2-1} =$$

$$(x-1)\left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^3+1}\right) = \frac{(x-1)(x^4-x^3-x+1)}{(x^2+1)(x^3+1)}$$

$$= \frac{(x-1)[x^3(x-1)-(x-1)]}{(x^2+1)(x^3+1)} = \frac{(x-1)^2(x^3-1)}{(x^2+1)(x^3+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$$

Identitatea dată este astfel verificată.

Soluțiuni analoage date de d-nii: *Alexandrescu N.* (Ploești), *Agapescu M. Nicolai* (Iași), *Andrieșescu Gh.* (Dorohoi), *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Apătean Camil* (Arad), *Arcadian N.* (Caracal), *Baștа George* (T.-Mureș), *Bălean G.* (Timișoara), *Bârglăzan N. Aurel* (Timișoara), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Bercovici Emil, Berdan C.* (Bârlad), *Bernardis N. Bernardo* (R.-Sărat), *Blumenfeld M. David* (Botoșani), *Beju Traian* (Arad), *Boju Șt. Rosetel* (Timișoara), *Ciorănescu C-tin* (M-rea Dealu), *Ciută Gavrli* (Timișoara), *Cocorandu M.* (Timișoara), *Cocoș Iulian* (Tg.-Mureș), *Comănescu D. Alex.* (Bălteni), *Constantinescu Gh. Iaan* (Chișinău), *Constantinescu Mircea* (Giurgiu), *Coșniță Virgil* (Bârlad), *Crețoiu A.* (București), *Damsescu Aurel* (Cluj), *Danciu Aurel* (Timișoara), *David Gheorghe* (Timișoara), *Davidsohn Mișu* (București), *Diaconu Gheorghe* (Tg.-Mureș), *Diaconu B. Marin* (M-rea Dealu), *Drogeanu N. Niculae* (București), *Drăghici Aurelian* (Tg.-Jiu), *Dumitrescu Alexandru* (București), *Dumitrescu Gh. Marin* (Craiova), *Dumitrescu C. Nicolae* (Pitești), *Dumitrescu Pantelimon* (Brăila), *Dumitrescu Sile* (Câmpina), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Gabrielescu C. Vasile* (Brăila), *Gârleșteanu Mihail* (Timișoara), *Gheorghiu C.* (Comănești), *Ghelber Mauriciu* (București), *Gheorghiu G. Olimpia, Goldstein L. M.* (București), *Grabovski Eugeniu* (Orhei), *Gradi T. Gh.* (Câmpina), *Grigorescu L. Ion* (M-rea Dealu), *Grofșorean Gheorghe* (Arad), *Iacovachi M. Ionel* (Focșani), *Iliescu Șt. Donia* (Tg.-Mureș), *Iliescu D. Emilian* (Caracal), *Iliescu M.* (M-rea Dealu), *Iliescu St. Virgil* (Tg.-Mureș), *Ionescu Nicu* (Pitești), *Ionescu Paul* (M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galați), *Giotta Vincențiu* (Bârlad), *Mendel Critz* (București), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Mironovici Virginia* (Câmpulung. Bucovina), *Mitescu D-tru* (Tg.-Mureș), *Neștianu Gh. Gheorghe* (M-rea Dealu), *Nicolae Aurel* (Avrig), *Nicolau Gh. C-tin* (R-Sărat), *Nicolau P. Hristodor* (Ploești), *Niculescu I. Isaia* (Mizil), *Nicolescu P. Vasile* (Tg.-Mureș), *Orbonaș Iuliu* (Timișoara), *Pantazi Gh. D-tru* (Brăila), *Pătroianu I. Mihail* (M-rea Dealu), *Pârvulescu Titus* (M-rea Dealu), *Percea Viorel* (Timișoara), *Petrulian Nicu* (Ploești), *Papp I. Emilian* (M-rea Dealu), *Popper Ervin* (Timișoara), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popescu I. Grigore* (Giurgiu), *Popescu Dem. Marin* (Giurgiu), *Popescu N. Nic.* (Câmpina), *Popovici I. Dan* (Chișinău), *Popovici Th. Ioan, Popovici Chr. Jean* (Galați), *Propst A. Jean* (Timișoara), *Rădulescu P. Marin* (Giurgiu), *Rădulet B. Remus* (Timișoara), *Râmniceanu L. Radu* (Tg.-Jiu), *Roșianu Șt. Nicolae* (Tg.-Mureș), *Samoilă D-tru* (Câmpina), *Savu N. Dumitrescu* (Tg.-Mureș), *Scripcă Laur.* (Iași), *Serban I. Tiberiu* (Brașov), *Simionescu D. Gh.* (M-rea Dealu), *Singer Bella* (București), *Solomon Nicu* (Timișoara), *Stamatescu I. Valeriu* (București), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stambulean Adrian* (Timișoara), *Stănciulescu George* (Pitești), *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stănescu D.* (Galați), *Stănescu A. Nicu* (Timișoara), *Ștefani Bruno* (Timișoara), *Stroescu I. Gheorghe* (Tg-Mureș), *Tauber Alexandru* (Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (București), *Teodorescu C. M.* (Timișoara), *Tomescu Gheorghe* (Timișoara), *Udrisky Traian* (Arad), *Vasilescu A. Mircea* (Giurgiu), *Vasiliu I.* (M-rea Dealu), *Vătășan G. Ovid* (Timișoara), *Vlăduțu S.* (M-rea Dealu) și *Voiculescu Mihail* (Tg.-Mureș).

In ultimul timp s'au mai primit soluțiuni dela d-nii: *Barbu Alexandru* (lic Tg. Mureș), *Berdan Gh.* (cl. IV Bârlad), *Bone V.* (lic. Internat Iași), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Calmanovici M. Savu* (lic. Cantemir, București), *Câudea Gh. Ioan* (lic. Sibiu), *Costăchescu N. Ionel* (lic. Brăila), *Ghilezan Moise* (lic. Timișoara), *Golopenția Antoniu* (lic. Timișoara), *Giulan Emil* (lic. Giurgiu), *Hermann I. Avram* (lic. Focșani), *Hotăran Teodor* (student), *Iliescu Th. Teodor* (București), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Kassargian A.* (lic. Cantemir, București), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Mirescu A. Petre* (lic. Lazăr, București), *Mitran St. Grigore* (lic. Craiova), *Petrescu P. Gh.* (lic. Ploești), *Popescu I. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Ropceanu Ion* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Silion Gh. Ion* (Brașov), *Spărchez Zeno* (lic. Brașov), *Suțelescu N. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov) și *Vasilescu A. Mircea* (lic. (Giurgiu).

Observări. Propunătorul și d-nii: *Coșniță Virgil* Bârlad), *I. N. Georgescu-Val* (Sublocot. Giurgiu) și *Popovici Th. Ioan*, stabilesc identitatea dată, transformând prin formulele lui *Euler* identitatea;

$$\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a,$$

așa cum se procedează în articolele din „R. M. T." an. II, N-rile 1 și 2.

2. D-l *Stambulean Adrian* (Timișoara), dă încă o soluție dezvoltând în două moduri diferite, determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x+1 \\ -(x^2-1) & x^2+1 & 0 \\ x^3-1 & 0 & x^3+1 \end{vmatrix}$$

3. D-l *Popovici Th.* stabilește și identitatea mai generală:

$$\frac{x^m-1}{x^m+1} + \frac{x^n-1}{x^n+1} - \frac{x^p-1}{x^p+1} = \frac{(x^m-1)(x^n-1)(x^n-1)}{(x^m+1)(x^n+1)(x^p+1)}$$

unde $p = m + n$.

PROBLEME PROPUSE

309. — Să se găsească un număr de trei cifre, știind că produsul cifrelor dă un cub perfect, iar suma cifrelor un patrat perfect.

TRAIAN N ANGELESCU

310. — Un obiect de aur și argint are volumul v centimetri cubi și greutatea a grame. Știind că un centimetru cub de aur cântărește 19 grame și că un centimetru cub de argint cântărește 10,5 grame, se cere să se calculeze greutatea de aur și de argint conținută în acel obiect. Să se calculeze ce volum să se dea acelui obiect pentru ca greutățile de aur și argint să fie exprimate în numere întregi de grame.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

311. — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)+2(x-3)+3(x-4)+4(x-5)+5(x-6)} = 24$$

DAVID GHEORGHE

312. — Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinele ecuației:

$$x^3 + (b+c-1)x^2 + bx + c = 0,$$

se cere să se stabilească relația:

$$\operatorname{arc\,tg} x_1 + \operatorname{arc\,tg} x_2 + \operatorname{arc\,tg} x_3 = \frac{\pi}{4}$$

EMIL STEFANESCU

313. — Să se demonstreze că ortopolurile a trei drepte paralele, în raport cu același triunghiu, sunt coliniare.

G. I. DUMITRESCU

314. — Pe cercul O circumscris triunghiului ABC, se ia un punct M, astfel ca arcul $AM = 90^0$. Din M se duce pe AC perpendiculara MN, iar din N se duce dreapta ND care formează cu înălțimea AH a triunghiului, unghiul $NDH = 45^0$. Dreapta ND întâlnește laturile AB și AC în E și F. Să se dovedească că patrulaterele AMNE și CNMF sunt inscriptibile. Să se mai dovedească că dreptele lui *Simpson* ale punctului M față de triunghiul variabil ABC, — care își păstrează vârful A fix și latura BC paralelă cu ea însuși — sunt paralele.

V. ALACI

315. — Pe malul mării sunt trei puncte, A, B, C situate pe aceiași linie dreaptă. Distanța $AB = 600\,m$, $BC = 1500\,m$. In largul mării, pe un vapor, se descarcă un tun, al cărui sunet sosește în punctul B cu 3 secunde mai târziu decât în C, iar în A cu 5 secunde mai târziu decât în C. La ce depărtare se află vaporul de cele trei puncte?

ER. CILCER

316. — Să se demonstreze identitatea:

$$\sum \sqrt{\frac{r_a - r}{r_a + r_c}} = 2\,\frac{r_a + r_b + r_c}{a+b+c}$$

N. A STANESCU

317. — Cercul cu centrul în O se învârtește în jurul unui diametru fix al său, cu viteza unghiulară ω. Să se determine accelerația lui *Coriolis* aplicată unui punct care se mișcă pe periferia cercului cu aceiași viteză unghiulară ω.

V. VALCOVICI

INFORMATIUNI

† Aflăm cu părere de rău încetarea din viaţă a tânărului nostru corespondent *Popean Lică* (Oltenița) și transmitem părinților, sincerile noastre condoleanțe.

Domnul *V. Vâlcovici,* rectorul școalei politechnice din Timișoara, a obținut din partea Ministerului de lucrări publice, pentru „R. M. T.“, o subvenție de 20.000 lei pentru anul în curs. Aducem viile noastre mulțumiri atât d-lui ministru *Tr. Moșoiu* cât și d-lui rector *V. Vâlcovici.*

Anunțăm cu plăcere că elevii cursului superior dela liceul din *Giurgiu,* au constituit o societate cu numele „*Spiru Haret*“, care are drept scop, stimularea unei rodnice activități matematice.

Cu aceiași vie plăcere, luăm cunoștință că și harnicii elevi ai cursului superior dela liceul „*Moise Nicoară*“ din *Arad,* sunt constituiți într'o *Societate „Științifică“* încă din 31 Decembrie 1921.

In cursul anului au ținut 10 ședințe și au reușit să aibă la îndemână și un „*Jurnal Matematic*„ litografiat, (vezi bibliografia), sub conducerea distinșilor noștri corespondenți *Tiberiu Popovici* și *Traian Udrisky.*

Abonamentul pe anul IV-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

50 (CINCIZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Subdirectorul Școalei Politecnice

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL III. 15 FEBRUARIE 1924. NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 5 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 50 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TR. LAELSCU. PATRULATERE REMARCABILE
2. NOTE MATEMATICE.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 265, 290.
5. PROBLEME PROPUSE
6. TABLA DE MATERII.
7. TABLOUL NUMELOR.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că fac parte din Comitetul de Redacție al Revistei Matematice din Timișoara, următorii:

Jecu M. Ion, licențiat în matematici, Str. Vasile Lascar (Teilor), 7, București, **Protopopescu Ion,** inginer, subdirectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse, probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL III. — NO. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1924.

BIBLIO RA"

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 5 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 50 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Matie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

PATRULATERE REMARCABILE

de TR. LALESCU

In problema de Geometrie propusă anul acesta la examenul de admitere din Şcoala Politechnică din Bucureşti, s'a cerut să se construiască un patrulater special inscriptibil în care laturile opuse erau proporţionale.

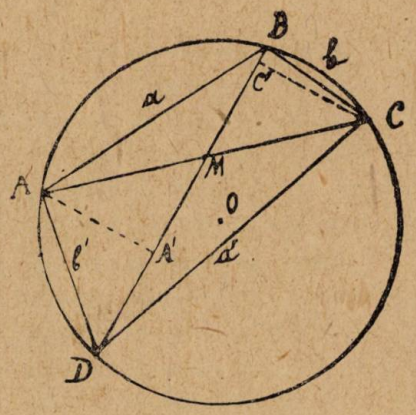
Această clasă specială de patrulatere nu am văzut-o studiată nicăeri şi de aceia cred că este interesant să pun în evidenţă proprietatea lor fundamentală care este de altfel foarte simplă

1. Problema este aceasta:

Fie (a, a') *şi* (b, b') *perechile de laturi opuse ale unui patrulater inscriptibil. Cum se pot construi patrulaterele pentru cari:*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

şi de ce proprietăţi se bucură aceste patrulatere?



Fie ABCD patrulaterul înscris considerat şi M punctul de întâlnire al diagonalelor.

Triunghiurile ABM şi CDM sunt asemenea; avem deci:

$$\frac{a}{a'} = \frac{BM}{MC}$$

Dar tot astfel şi triunghiurile AMD şi BMC sunt asemenea; prin urmare:

$$\frac{b'}{b} = \frac{AM}{MB}$$

Ţinând seama de egalitatea $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, deducem $\frac{MB}{AM} = \frac{MB}{MC}$, de unde $AM = MC$.

Prin urmare: *Punctul de întâlnire al diagonalelor împarte în două părţi egale una din diagonale.*

Această proprietate este caracteristică şi dă cheea celorlalte. Ea se poate de altfel verifică şi astfel:

Din relaţia dată, care se mai poate scrie şi $ab' = ba'$, deducem că triunghiurile BAD şi BCD sunt echivalente. Raportate la baza comună BD, ele trebue să aibă aceiaşi înălţime; deci $AA' = CC'$, de unde rezultă imediat $AM = MC$.

Putem deci construi o infinitate de asemenea patrulatere. N'avem decât prin mijlocul unei coarde oarecari să facem să treacă o altă coardă oarecare, şi extremităţile acestor două coarde ne vor dà un asemenea poligon.

2. In cazul special al patrulaterului propus în care una din laturi este diametrul cercului, iar cealaltă este latura patratului, raportul de proporţionalitate este $\frac{\sqrt{2}}{2}$; în acest caz, patrulaterul se mai bucură de câteva proprietăţi simple cari pot fi iarăşi uşor arătate.

In acest caz, coarda AB subîntinde un unghiu de 90°, deci unghiul $\widehat{AMD}$ este de 45° fiindcă

suma arcelor AD și BC este tot 90°. Dar (fig. 2) atunci triunghiurile dreptunghice ADA', AMA' și BMC sunt egale între ele și prin urmare DA' = A'M = MB; cu alte cuvinte *cealaltă diagonală este și ea împărțită într'un raport simplu, și anume:*

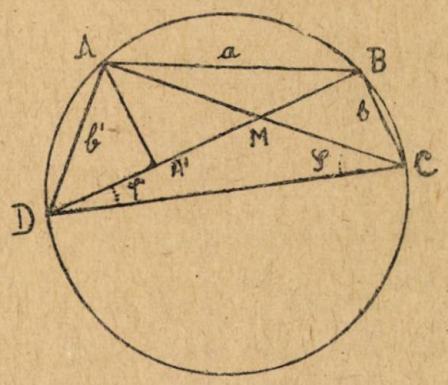
$$MD = 2MB.$$

In același timp, diagonalele sunt egale cu:

$$AC = 2AM = 2b'$$

și

$$BD = 3BM = 3BC = 3b.$$



Triunghiurile dreptunghice BCD și ACD sunt deci două triunghiuri remarcabile și anume, în primul, *raportul catetelor este* $^1/_3$, iar în celalt, *raportul este* $^1/_2$.

De aci rezultă că elementele fundamentale ale acestui patrulater sunt:

$$AB = R\sqrt{2}, \qquad CD = 2R$$

$$BC = \sqrt{\frac{2}{5}}.R \qquad AD = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{(laturi)}$$

și

$$AC = 4\frac{R}{\sqrt{5}} \qquad BD = 3\sqrt{\frac{2}{5}}R \qquad \text{(diagonale)}$$

$$\hat{A} = 90^0 + 18^0,\ 30' = 108^0,\ 30'$$

$$\hat{B} = 90^0 + 26^0,\ 30' = 116^0,\ 30'$$

$$\hat{C} = 45^0 + 26^0,\ 30' = 71^0,\ 30' \qquad \text{(unghiuri)}$$

$$\hat{D} = 45^0 + 18^0,\ 30' = 63^0,\ 30'$$

Acest patrulater se bucură deci de proprietățile următoare:

1). Este inscriptibil. 2). Raportul k al laturilor opuse este același. 3). Raportul dintre diagonale este $^3/_2\ k$.

Aceste proprietăți sunt caracteristice.

Ca proprietăți unghiulare avem:

1). Diagonalele se tae sub un unghiu de 45°.

2). O pereche de laturi se tae sub un unghiu de 45°, iar cealaltă sub un unghiu egal cu

$$\varphi - \varphi' = \text{arc tg}\,\frac{1}{7} = 8^0.$$

NOTE MATEMATICE

In R. M. T., pag. 148, s'a publicat o notă „despre probabilitatea la zaruri". Intrucât în amintita notă s'au strecurat unele greșeli, revenim asupra chestiunii în întregul ei.

Două zaruri cubice cu fețele numerotate 1 — 6 fiind aruncate, problemele ce se pun sunt:

1°. Care este probabilitatea de a da un anume număr.

2°. Care este probabilitatea de a da o anume pereche de numere.

3°. Care este probabilitatea de a da o anume sumă.

4°. Care este probabilitatea de a da o anume dublă. (ambele zaruri să marcheze același număr).

*

1°. — Două zaruri aruncate pot să se așeze în 36 de poziții, fiecare număr al unui zar putându-se combina cu fiecare din cele 6 numere ale celuilalt zar. In total deci 36 probabilități.

Pentruca două zaruri fiind aruncate, unul din ele să arate un anume număr avem 12 posibilități favorabile și anume, numărul dat de pe un zar combinat cu fiecare din cele șase numere ale celuilalt și cum numărul se găsește de două ori—odată pe fiecare zar avem $2 \times 6 = 12$ posibilități favorabile. In acest caz probabilitatea este

$$\pi_a = \frac{12}{36} = 33,\ 33\ldots\ ^0/_0$$

Din aceste douăsprezece posibilități favorabile una este dublă, adică numărul apare de două ori în aceiaș aruncătură de zar așa că de fapt din 36 posibilități numai la 11 aruncături apare numărul dat și probabilitatea este în acest caz

$$\pi'_a = \frac{11}{36} = 30,555\ldots\,\%.$$

3°. Pentruca zarurile aruncate să marcheze o anume pereche de numere nu avem de cât două cazuri favorabile și anume fiecare zar să marcheze unul din cele două numere ale perechii date, — ex (3.2) (2.3).

In acest caz probabilitatea este

$$\pi_{a.b} = \frac{2}{36} = 5,555\ldots\,\%.$$

Acest procent nu este valabil decât pentru perechile de numere distincte nu și pentru duble.

3°. Pentruca aruncând două zaruri ele să marcheze o sumă dată probabilitatea depinde de posibilitatea pe care o avem de a compune acea sumă din doi termeni fiecare variind dela 1 — 6.

Dacă suma este mai mică sau egală cu 7 ea se poate forma în $(s-1)$ feluri, făcând pe unul din termeni să varieze dela 1 până la $(s-1)$. In acest caz probabilitatea este

$$\pi_s = \frac{s-1}{36}, \quad 2 \leqq s \leqq 7.$$

Dacă suma s este mai mare decât 7 ea nu poate fi formată decât cu termeni începând dela $(s-6)$ și terminând cu termenul 6; în acest caz pierdem din șirul de posibilitate $(s-7)$ termeni la începutul seriei și $(s-7)$ la sfârșit. In aceste condiiuni posibilitățile favorabile sunt $s-1-2(s-7) = 13-s$ iar probabilitatea este

$$\pi'_s = \frac{13-s}{36} \qquad 7 \leqq s \leqq 12.$$

Din examinarea comparativă a acestor două formule se constată că pentru sumele dela 2 până la 12 probabilitățile se eșalonează simetric în raport cu probabilitatea sumei 7.

Dacă ținem însă seama de convenția jocului de table unde dublele valorează dublu cât un zar simplu, atunci seria probabilităților se schimbă cum vom arăta, iar sumele ce se pot atinge nu se limitează la 12 ci se ridică până la 24.

4°. Posibilitatea de a forma o dublă oarecare este *aceiaș pentru toate dublele*. Faptul este evident căci fiecare din cele 6 numere au aceiaș probabilitate de a eși. Din cele 36 de posibilități *una singură* e favorabilă pentru a face o dublă, numărul din dublă apărând o singură dată pe fiecare zar. In acest caz probabilitatea este

$$\pi_{a,a} = \frac{1}{36} = 2,777\ldots\,\%.$$

*
* *

Problema generală care se pune la jocul de table este de a putea atinge o „cază“ la o anumită distanță de o altă cază dată.

In această situație ne interesează pentru fiecare depărtare dela 1 până la 24 câte posibilități favorabile și deci probabilitatea ce o avem de a atinge caza dorită independent de modul cum obținem acea sumă care indică depărtarea. In acest caz și cu convenția dublelor, putem lovi o cază cu valoarea unui zar, cu suma simplă a zarurilor și cu sume compuse de 3 și 4 ori pentru duble

Pentru a stabili pentru fiecare număr dela 1 la 24 probabilitatea, va trebui să adăugăm la probabilitățile găsite mai sus sub 3° și probabilitatea ce rezultă din duble precum și aceea ce rezultă din atingerea cazei cu un singur zar. Această probabilitate nu este decât pentru numerile dela 1 la 6 și ea a fost determinată sub 1°.

Așa dar pentru cazele situate la distanța 1 până la 6 probabilitatea de a lovi este mărită cu 30, 555...%.

Dacă ținem seamă că o dublă poate atinge 4 caze (a, $2a$, $3a$ și $4a$) și adăugăm și probabilitățile omise mai sus $3a$ și $4a$ găsim că făcând să varieze a dela 1 la 6 mai avem potrivit punctului 4° posibilitatea de a lovi cazele dela distanțele 5, 4, 6, 8, 9, 12, 12, 16, 15, 20, 18, 24 cu o probabilitate sporite cu 2. 777...%.

In rezumat și în această ultimă ipoteză probabilitatea de a găsi o anume cază dela o distanță dată se pot totaliza în tabloul.

s	1	2	3	4	5	6	7	8
π	$\frac{1+11}{36}$	$\frac{1+11}{36}$	$\frac{2+11+1}{36}$	$\frac{3+11+1}{36}$	$\frac{4+11}{36}$	$\frac{5+11+1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1+5}{36}$

s	9	10	11	12	15	16	18	20	24
π	$\frac{4+1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1+2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Este clar că aceste probabilităţi sunt cu totul teoretice în realitate intervin diferite împrejurări care fac imposibile anumite mişcări micşorând astfel probabilitatea determinată mai sus.

ION PROTOPOPESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică* anul XXIX, No. 5, Ianuarie 1924. Teoreme asupra triunghiului, de *Grigore C. Moisil.* O generalizare a teoremei lui *Franke* de *Mihail I. Focşeneanu.*

2. *Jurnal Matematic.* Vol. I, No. 2, Ianuarie 1923. Asupra funcţiunilor pseudoomogene, de *Tib. Popovici.*

PROBLEME REZOLVATE

265. — *Dacă,* $a+b+c=0$, *atunci:*

$$(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3 = \frac{1}{2}\left[(a^3-b^3)^2+(b^3-c^3)^2+(c^3-a^3)^2\right]$$

I. DUMITRIU-ARAD

Insemnând cu A şi B cei doi membri ai identităţii date, şi dezvoltându-i separat, putem scri succesiv:

$$(1)\quad A = a^6+b^6+c^6-3a^4bc-3ab^4c-3abc^4+9a^2b^2c^2-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3 =$$

$$a^6+b^6+c^6-3abc(a^3+b^3+c^3-3abc)-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3$$

$$(2)\quad B = \frac{1}{2}\left(2a^6+2b^6+2c^6-2a^3b^3-2b^3c^3-3c^3a^3\right) = a^6+b^6+c^6-a^3b^3-a^3c^3-b^3c^3.$$

Dacă comparăm acum ultimii membri din (1) şi (2), vedem că ei ar fi egali, dacă am putea dovedi că:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

Aceasta o putem dovedi însă, plecând dela relaţia dată:

$$a+b+c=0,$$

sau:

$$(3)\qquad a+b=-c.$$

Ridicând la cub, deducem:

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3.$$

Privind relaţia (3), putem scri tocmai relaţia dorită:

$$(4)\qquad a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

In virtutea relaţiei stabilite (4), ultimii membri din (1) şi (2) sunt egali şi atunci rezultă, că şi:

$$A=B.$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluţii bune date de d-nii: *Alexandrescu N.* (Ploeşti), *Andrieşescu Gh.* (Dorohoi), *Apăteanu Camil* (lic. Arad), *Bărglăzan N. Aurel* (Şc. Polit. Timişoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beju Traian* (lic. Arad), *Bercovici A. Emil* (student), *Berdan C.* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Botiş E. Virgil* (Arad), *Botez St. Mihail*, *Bruno Ştefan* (Timişoara), *Calmanovici M. Savu* (lic. Cantemir Bucureşti), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ciută Gavril* (Şc. Polit. Timişoara), *Cocorandu M.* (Şc. Polit. (Timişoara), *Comănescu D. Alexandru* (Bălteni), *Constantinescu Mircea* (lic. Giurgiu), *Costăchescu N. I.* (lic. Brăila), *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. Flilckstein* (Cernăuţi), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Timişoara), *I. N. Georgescu-Val.* (Călăraşi), *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Gheorghiu Gh. Olimpia*, *Giotta Vincenţiu* (Bârlad), *Gradin I. Gheorghe* (lic Câmpina), *Grigorescu L. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Hermann Avram* (lic. Focşani), *Hristodor P. Nicolau* (Ploeşti), *Iliescu Teodor* (Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz Pincu* (Galaţi), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Mihăilescu Romeo* (R-Vâlcea), *Mirescu A. Petru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Neştianu Gh. Gheorghe* (lic M-rea Dealu), *Pantazi Gh. D-tru* (lic. Brăila), *Pânescu C Iancu* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu) *Popescu N. Nic.* (lic. Câmpina), *Popovici Th. Ioan*, *Popovici Chr. Jean* (lic. Galaţi), *Propst Jean* (Şc. Polit. Timişoara), *Rădulescu P. Marin* (lic Giurgiu), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Solacolu C. Şerban* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Stamatiu*

Mihail (Piteşti), *Stambuleanu A.* (Timişoara), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Stănciulescu I. C-tin* (Giurgiu), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (Braşov), *Teodorescu M. C.*, *Terfeleag Olga* (lic. Caransebeş), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie), *Udrisky Traian* (lic. Arad), *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu) şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

In ultimul timp s'au primit soluţiuni dela d-nii: *Ardelea Radu* (lic. Braşov), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov) şi *Critz Mendel* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Soluţia 2-a dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Cretoiu A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *David Gheorghe* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Popovici Dan* (Chişinău), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

Din relaţia dată, $a+b+c=0$, deducem:

(1) $a=-b-c,\ b=-a-c,\ c=-a-b,$

Multiplicându-le respectiv cu $a,\ b,\ c$ avem:

$$a^2=-ab-ac,\ b^2=-ab-bc,\ c^2=-ac-bc,$$

$$^{*}_{**}\quad a^2-bc=-ab-ac-bc,$$

$$b^2-ac=-ab-bc-ac,\ c^2-ab=-ac-bc-ab$$

Membrii al 2-lea fiind egali, rezultă:

(2) $$a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab.$$

De asemenea ridicând relaţiile (1) la patrat, deducem:

$$a^2=b^2+c^2+2bc,\ b^2=a^2+c^2+2ac,$$

$$c^2=a^2+b^2+2ab$$

$$^{*}_{**}\quad a^2-bc=b^2+bc+c^2,\ b^2-ac=a^2+ac+c^2,$$

$$c^2-ab=a^2+ab+b^2.$$

In virtutea relaţiilor (2) putem scri:

(3) $$a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab=b^2+bc+c^2$$
$$=a^2+ac+c^2=a^2+ab+b^2$$

Acum folosind aceste relaţii, cei doi membrii ai identităţii cerute se pot scri succesiv:

(4) $(a^2-bc)^3+(b^2-ac)^3+(c^2-ab)^3=3(a^2-bc)^2$

şi:

(5) $$\frac{1}{2}\left[(a^3-b^3)^2+(b^3-c^3)^2+(c^3-a^3)^2\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2+(b-c)^2(b^2+bc+c^2)^2\right.$$
$$\left.+(c-a)^2(c^2+ac+a^2)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-bc)^2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-bc)^2(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=(a^2-bc)^2[(a^2-bc)+(b^2-ac)$$
$$+(c^2-ab)]=3(a^2-bc)^3$$

Ultimii membrii din relaţiile (4) şi (5) fiind egali, şi primii rezultă că sunt egali, adică:

$$(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^3+(c^2-ab)^3$$
$$=\frac{1}{2}\left[(a^3-b^3)^2+(b^3-c^3)^2+(c^3-a^3)^2\right]$$

care este tocmai identitatea cerută.

Observare. Şirul de relaţiuni (3) dedus din $a+b+c=0$, se găseşte şi în „Culegere de Probleme“ pag. 211.

290. — *Să se găsească maximul funcţiunii:*

$$y=\operatorname{tg}x\,.\cos^3x-\operatorname{tg}^2x(\sin^3x-\sin^2x-\sin x+1),$$

fără ajutorul derivatelor.

Ş. MUSTA

Soluţie dată de d-nii: *Bârglăzan Aurel* (Şc. Polit. Timişoara), *Popper Ervin* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Stamatiu Mihail* (Piteşti) şi *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Expresiunea dată se poate scrie succesiv, înlocuind $\operatorname{tg}x$ şi $\cos x$ în funcţie de $\sin x$ şi simplificând:

$$y=\sin x(1-\sin^2x)-\frac{\sin^2x}{1-\sin^2x}(1-\sin^2x)(1-\sin x)$$

$$=\sin x(1-\sin^2x)-\sin^2x(1-\sin x)=\sin x-\sin^2x,$$

sau:

$$\sin^2 x - \sin x + y = 0$$

$$\therefore \quad \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}$$

Pentru a avea valori reale pentru $\sin x$, trebuie ca:

$$1 - 4y \geqq 0$$

$$\therefore \quad y \leqq \frac{1}{4}$$

Se vede uşor că:

$$\max. y = \frac{1}{4}$$

care are loc pentru:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

sau:

$$x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

Soluţia a 2-a, dată de d-nii: *Ciută G.* (Timişoara), *Dumitrescu Alexandru* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Rădulet B. Remus* (Şc. Politechnică, Timişoara) şi *Stamatiu Mihail* (Piteşti).

Simplificând ca mai sus expresia dată, găsim:

$$y = \sin x - \sin^2 x = \frac{1}{4} - \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Deducem că y este maxim când scăzătorul care este pozitiv este zero, adică când:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

în care caz:

$$\max. y = \frac{1}{4}$$

Soluţia 3-a dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil* (student), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Boju Rosetel* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Cocorandu M.* (Şc. Polit. Timişoara), *Epure Ştefan* (Buzău), *Fântâneanu Ioan* (Bucureşti), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val* (Sublocot. Dadilov), *Herscovici Emanoil* (lic. Calaţi), *Iscovici I. J.* (Piteşti), *Katz Pincu* (Galaţi), *Marian Solomon* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Nicolau* (R.-Sărat), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Popescu N. Nic.* (lic. Câmpina), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Stamatescu I. Valeriu* (Seminarul Pedagogic, Bucureşti), *Stănciulescu A. George* (Piteşti), *Stănescu A. Nicolae* (Şc. Polit. Timişoara), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. St. Teodorescu* (student, Bucureşti), *Vătăşan G. Ovid* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Zoican A.*

Simplificând ca mai sus expresia dată, găsim:

$$y = \sin x - \sin^2 x = \sin x (1 - \sin x)$$

Dacă x este un arc astfel ca, $\sin x > 0$,

atunci vedem că y este un produs de doi factori pozitivi a căror sumă este constantă, egală cu **1**; maximul lui y are loc când factorii sunt egali, adică:

$$\sin x = 1 - \sin x$$

sau:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

In care caz:

$$\max. y = \frac{1}{4}$$

Dacă x este un arc astfel ca $\sin x < 0$, atunci punând $\sin x = -t$, $t > 0$, avem:

$$y = -t(t+1),$$

şi se vede că y nu poate fi în acest caz maxim.

Observări. 1. D-l *Flichstein I.* (Cernăuți), a dat o soluție cu ajutorul derivatelor. 2. Alte soluții date de d-nii: *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea) și *Onițiu Florin.*

In ultimul timp s'au primit soluțiuni dela d-nii: *Hartular Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Niculescu Isaia* (Mizil), *Popescu N. Nic.* (lic. Câmpina), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Serghiev Ion* (lic. Chișinău), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani) și *Teodorescu St. I.* (student).

PROBLEME PROPUSE

318. — Să se găsească două numere astfel ca 65620 să întreacă produsul lor. cu suma lor.

EMIL ȘTEFANESCU

319. — Să se găsească patratele perfecte de cinci cifre de forma $abcab$ precum și pe acelea de forma $abcba$.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

320. — Dacă:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,$$

atunci expresiunea:

$$\frac{2x^3+2y^3+2z^3-9xyz}{(x+y)^3+(x+z)^3+(y+z)^3}$$

este independentă de x, y, z.

V. ALACI

321. — Să se afle limita expresiunii:

$$\frac{\sqrt[3]{15x+19}-\sqrt{25-x^2}}{x-\sqrt[3]{4x^2-9}}$$

când x tinde către 3, fără a folosi regula lui *Hôpital.*

M. VASILIU

322. — Intr'un cerc se înscriu două triunghiuri dreptunghice ACD și BCD având ca ipotenuză comună un diametru CD și în cari raportul catetelor este respectiv egal cu 2 și 3. Să se arate geometricește că în una din pozițiile posibile, arcul AB este de 90^0.

TR. LALESCU

323. — Se consideră paralelogramul $ABCD$. Pe laturile AB, BC, CD, DA se construesc, în exteriorul paralelogramului, triunghiurile asemenea $AA'B$, $BB'C$, $CC'D$, $DD'A$, având aceiași orientare în plan. Se cere: 1). Să se demonstreze că dreptele $A'C'$, $B'D'$ se întâlnesc în centrul paralelogramului $ABCD$. 2). Să se arate că figura $A'B'C'D'$ este paralelogram.

G. I. DUMITRESCU

324. — In triunghiul dreptunghic ABC se duce prin mijlocul înălțimei AH o paralelă cu ipotenuza BC, care întâlnește catetele AB și AC în M și N. Să se stabilească relațiunea:

$$MH-NH=\frac{BC(BH-HC)}{4(MN+NH)}.$$

SIMIONESCU D. GH.

325. — Să se dovedească că într'un triunghiu oarecare, avem relațiunea:

$$\frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{sp-r^3-4Rr^2}=$$

$$\frac{2}{r^2p^2}(s-r_a\,p)(s-r_b\,p)(s-r_c\,p),$$

notațiile fiind cele obicinuite,

MAURICIU GHELBER

326. — Intr'un triunghiu oarecare există rela-

$$\frac{r_a-r_b}{a-b}+\frac{r_b-r_c}{b-c}+\frac{r_c-r_a}{c-a}=\frac{p}{r}$$

notațiile fiind cele obicinuite.

N. A. STANESCU

TABLA DE MATERII

ARTICOLE

V. Alaci	Funcțiuni pseudo-omogene . .	3
N. Ciorănescu	Un mod de generare a unor identități din determinanți .	4
A. Niculescu	Câteva proprietăți în legătură cu ortocentrul	19
Tr. Lalescu	Serii convergente și serii divergente	35
V. Vâlcovici	Balanța lui Quintenz cu trei pârghii de bază	51
E. Abasohn	Coordonate tangențiale . . .	67
Tr. Lalescu	Simetrie, omogenitate	83
F. Pop	Zona sferică	99
I. Stoenescu	Insumări trigonometrice . . .	100
M. Ghermănescu	Proprietăți ale seriilor recurente	115
V. Alaci	Câteva însumări trigonometrice	131
A. Angelescu	Asupra unei formule de derivare	147
I. Al. Stoenescu	Asupra unor limite.	163
Tr. Lalescu	Patrulatere remarcabile . . .	179

NOTE MATEMATICE

V. Alaci	Asupra funcțiunilor pseudo-omogene	6
V. Alaci	Asupra unei note din G. M. .	21
I. Al. Stoenescu	Asupra problemei 179 . . .	37
N. I. Ciorănescu	Aplicațiile unei identități geometrice	38
D. Panaitescu	Câteva identități trigonometrice	38
I. Al. Stoenescu	Asupra unei identități . . .	52
Lt.-Col. Gh. Buicliu	Asupra unei serii	68
Lt--Col. Gh. Buicliu	Reciproca problemei 159 . .	68
I. Al. Stoenescu	Generalizarea problemei 159 .	68
I. Al. Stoenescu	Asupra problemei 70	85
Fl. Er. Georgescu	Aria unui triunghiu în funcție de înălțimi	85
T. Popovici	Asupra unor triunghiuri . .	102
L. Weiss	Suma derivatelor unui polinom în x	119
A. Angelescu	Asupra unor ecuațiuni de gr. II	135
A. Niculescu	Eliminantul a două ecuațiuni de gradul al 2-lea	136
M. Vasiliu	Despre probabilitatea la zaruri	148
V. Vâlcovici	Asupra compunerii a două forțe paralele	165
Dili Schileru	O generalizare	166
Dili Schileru	O relație cu aplicații într'un triunghiu	166
Ion Protopopescu	Probabilitatea la zaruri . . .	130

RECREAȚIUNI MATEMATICE

Dima St. Iliescu	Cum putem afla luna în care s'a născut o persoană și vârsta ei	54
O. Schmautz	Proprietățile numerilor . . .	150

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Asociației de matematici pure și aplicate 7, 21, 39, 69, 86, 137

Gazeta Matematică 7, 21, 39, 55, 69, 86, 121, 137, 150, 168

Note matematice și științifice 21

Table de logaritmi de Dimitrie Vasilovici . . . 21

P. Sergesco. Application de la théorie des résidus à la démonstration d'un théorème d'Hermite 86

P. Sergesco. Sur les noyaux symmétrisables . . . 86

E. Abashon. Chestiuni de examen 121

l'Education Mathématique 150

Matematicas y Fisicas elementales 150

Societatea Română de Științe 168

Jurnal Matematic 168

N. Abramescu. Su una clase di serie di polinomi . 168

P. Sergesco. Sur le distribution des valeurs caractéristiques de noyaux de Marty 168

CHESTIUNI DE EXAMEN

Școala Politechnică din Timișoara (1923) 22

Școala Politechnică din Timișoara (1923) 69

Școala Politechnică din Timișoara, examenul de admitere 137

PROBLEME PROPUSE

Numărul de ordine al problemei în *cifre cursive*, primul număr următor indică pagina unde a fost propusă, (urmată de cifra romană care indică anul), al doilea, pagina unde a fost rezolvată, N este nerezolvată.

42, 94 I, N; *50,* 110 I, N; *54,* 126 I, N; *58,* 126 I, 39; *70,* 142 I, N; *76,* 158 I, N; *80,* 158 I, 104; *81,* 174 I, N; *82,* 174 I, N; *88,* 174 I, N; *91,* 187 I. N; *92,* 187 I, N; *98,* 187 I, N; *99,* 187 I, N; *100,* 187 I, N; *101,* 14 II, 41; *114,* 30 II, N; *121,* 30 II, N; *125,* 46 II, N; *131,* 62 II, N; *132,* 62 II, 42; *133,* 62 II, N; *134,* 62 II, 7; *135,* 62 II, 23; *137,* 62 II, 43; *139,* 62 II, 44; *140,* 62 II, N; *141,* 62 II, N; *142,* 77 II, N; *143,* 77 II, 86; *144,* 77 II, 25; *145,* 77 II, 55; *146,* 78 II, 56; *147,* 78 II, 57; *148,* 78 II, 8; *150,* 78 II, N; *152,* 78 II, 58; *153,* 78 II, 12; *154,* 78 II, N; *155,* 94 II, 87; *156,* 94 II, N; *157,* 94 II, N; *158,* 94 II, 27; *159,* 94 II, 60; *160,* 94 II, N; *161,* 94 II, N; *162,* 94 II, N; *163,* 94 II, N; *164,* 94 II, N; *165,* 94 II, N; *166,* 94 II, N; *167,* 110 II, 87; *168,* 110 II, N; *169,* 110 II, N; *170,* 110 II, N; *171,* 110 II, N; *172,* 110 II, N; *173,* 110 II, N; *174,* 110 II, N; *175,* 110 II, N; *176,* 126 II, N; *177,* 126 II, 28; *178,* 126 II, N; *180,* 126 II, N; *181,* 126 II, 45; *182,* 126 II, N; *183,* 126, II, 69; *184,* 126 II, N; *185,* 126 II, N; *186,* 142 II, N; *187,* 142 II, N; *188,* 142 II, 88; *189,* 142 II, 90; *190,* 142 II, 105; *191,* 142 II, N; *192,* 142 II, 71; *193,* 142 II, 28; *194,* 142 II, N; *195,* 142 II, N; *196,* 158 II, 91; *197,* 158 II, N; *198,* 158 II, N; *199,* 158 II, N; *200,* 158 II, 106; *201,* 158 II, 72; *202,* 158 II, 107; *203,* 158 II, 151; *204,* 158 II, 151; *205,* 174 II, N; *206,* 174 II, N; *207,* 174 II, N; *208,* 174 II, N; *209,* 174 II, 74; *210,* 174 II, 108; *211,* 174 II, 121; *212,* 174 II, N; *213,* 174 II, N; *214,* 185 II, N; *215,* 185 II, N; *216,* 185 II, N; *217,* 185 II, N; *218,* 185 II, N; *219,* 185 II, N; *220,* 14 III, 92; *221,* 14 III, N; *222,* 14 III, N; *223,* 14 III, N; *224,* 14 III, 122; *225,* 14 III, 123; *226,* 14 III, 77; *227,* 14 III, N; *228,* 14 III, 93; *229,* 14 III, 152; *230,* 14 III, N; *231,* 30 III, 153; *232,* 30 III, N; *233,* 30 III, N; *234,* 30 III, N; *235,* 30 III, N; *236,* 30 III, 124; *237,* 30 III, N; *238,* 30 III, 137; *239,* 30 III, 139; *240,* 46 III, 139; *241,* 46 III, 153; *242,* 46 III, 109; *243,* 46 III, N; *244,* 46 III, N; *245,* 46 III, N; *246,* 46 III, N; *247,* 46 III, N; *248,* 46 III N; *249,* 46 III, N; *250,* 62 III, 155; *251,* 62 III, N; *252,* 62 III, N; *253,* 62 III, N; *254,* 62 III, 125; *255,* 62 III, N; *256,* 62 III, N; *257,* 62 III, 155; *258,* 62 III, 141; *259,* 62 III, N; *260,* 78 III, 157; *261,* 78 III, 168; *262,* 78 III, N; *263,* 78 III, N; *264,* 78 III, N; *265,* 78 III, N; *266,* 78 III, 173; *267,* 78 III, N; *268,* 78 III, N; *269,* 94 III, N; *270,* 94 III, N; *271,* 94 III, 157; *272,* 94 III, N; *273,* 94 III, 172; *274,* 94 III, N; *275,* 94 III, N; *276,* 94 III, N; *277,* 110 III, N; *278,* 110 III, N; *279,* 110 III, N; *280,* 110 III, N; *281,* 110 III, N; *282,* 110 III, N; *283,* 110 III, N; *284,* 110 III, N; *285,* 126 III, N; *286,* 126 III, N; *287,* 126 III, N; *288,* 126 III, N; *289,* 126 III, N; *290,* 126 III, N; *291,* 126 III, N; *292,* 126 III, N; *293,* 142 III, N; *294,* 142 III, N; *295,* 142 III, N; *296,* 142 III, N; *297,* 142 III, N; *298,* 142, III, N; *299,* 142 III, N; *300,* 142 III, N; *301,* 142 III, N; *302,* 142 III, N; *303,* 158 III, N; *304,* 158 III, N; *305,* 158 III, N; *306,* 158 III, N; *307,* 158 III, N; *308,* 158 III, N; *309,* 174 III, N; *310,* 174 III, N; *311,* 174 III, N; *312,* 174 III, N; *313,* 174 III, N; *314,* 174 III, N; *315,* 174 III, N; *316,* 174 III, N; *317,* 174 III N; *318,* 185 III, N; *319,* 185 III, N; *320,* 185 III, N; *321,* 185 III, N; *322,* 185 III, N; *323,* 185 III, N; *324,* 185 III, N; *325,* 185 III, N; *326,* 185 III, N.

TABLOUL NUMELOR

Abasohn E., 2, 21, 45, 46, 67, 78, 121' 150.
Abramescu N., 2, 43, 107, 168.
Adamescu Maxim, 34.
Adam I. Mircea, 8, 12, 26, 39, 41, 42, 44, 58, 60, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 88, 91, 93, 107, 108, 122, 124, 125, 139, 141, 151, 152, 156.
Alaci V., 2, 3, 7, 14, 15, 18, 21, 30, 34, 46, 50, 62, 66, 77, 78, 82, 94, 98, 102, 106, 110, 114, 126, 130, 131, 137, 142, 146, 158, 162, 174, 178, 185.
Agapescu A. Nic., 125, 126, 173.
Alexandrescu Elena 2.
Alexandrescu M., 24, 55, 86.
Alexandrescu N., 122, 125, 141, 151, 152, 155, 173, 182.
Amărăscu O. G., 8, 24, 25, 28, 55, 58, 61, 87, 88.
Andrieşescu Gh., 173, 182.
Angelescu A., 2, 136, 147, 150.
Angelescu N. Tr., 122, 123, 125, 126, 139, 153, 155, 157, 173, 174, 183.
Angheluţă Th., 2, 7, 46, 62, 69, 72, 108.
Antonescu I., 54.
Antoniu S. Ion., 24, 25, 41, 44, 55, 57, 88.
Apătean Camil, 45, 74, 126, 173, 182.
Arcadian G. N., 24, 28, 44, 58, 74, 88, 91, 122, 141, 151, 152, 155, 156, 173.
Ardelea Radu, 183.
Arghir Iancu, 98, 114, 130, 146, 162.
Asnaş I. S., 24, 25, 58.
Atanasiadi A., 26.
Atanasiu D., 8, 24, 28, 29, 42, 44, 55, 58, 70, 71, 74, 77, 88, 90, 91, 105, 108, 121, 173.

Balaban N., 2.
Balasz D., 34.
Balint E., 28, 91.
Bălean Gh., 154, 172, 173.
Banciu I., 2.
Bamdrabur C., 74.
Bănărescu M., 34.
Barbălat M, B., 25.
Barbelian D., 31.
Barbu A., 74, 173.
Bărglăzan A., 28, 58, 74, 88, 91, 93, 108, 109, 122, 123, 139, 141, 143, 151, 152, 154, 155, 157, 158, 172, 173, 182, 183.
Baron C., 2.
Başta Gh., 74, 91, 153, 173.
Beldie D., 24, 25, 55, 58, 70, 72, 74, 91, 106, 124, 126, 141, 151, 152, 153, 155, 172, 173, 182, 184.
Beju Traian, 124, 125, 173, 182.
Bercovici D., 29, 92.
Bercovici E., 8, 10, 25, 30, 56, 58, 59, 74, 88, 91, 123, 125, 140, 141, 151, 152, 154, 155, 156, 173, 182, 184.
Bercovici S., 124, 125, 141, 155.
Berdan I. C., 8, 25, 28, 40, 42, 45, 58, 59, 60, 69, 70, 72, 74, 77, 88, 91, 92, 93, 105, 106, 109, 122, 123, 124, 125, 139, 140, 141, 152, 153, 154, 155, 157, 173, 182.
Bernardis Berardo, 74, 124, 173.
Beşliu C., 25, 58.
Biernaschi C., 41, 61, 69, 70, 88.
Blasian V., 34.
Bleiweiss S., 45.
Blumenfeld D., 45, 58, 72, 107, 122 139, 141, 151, 152, 156, 173, 182, 18
Bobârnac M., 24, 44, 45, 46, 55, 58, 59, 60, 61, 62, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 88, 91, 105, 106, 108, 109, 121, 124, 125, 137, 139, 142, 151, 152, 173.
Bocancea Ch., 74, 153.
Bogdan Martinian, 25, 28, 44, 48, 55, 58, 61, 70, 87, 88.
Bolgiu B., 24, 45, 91.
Bonea I., 8, 28, 42, 86, 88, 91, 108, 151, 152, 173.
Botea Nic., 25, 153, 155, 172, 173, 183.
Botez St. M., 28, 74, 123, 157, 182.
Botez M., 2.
Botiş Virgil, 71, 74, 88, 93, 182.
Brădeţeanu C., 61, 91, 140.
Brăescu Cezar, 60.
Brăescu G., 27.
Braeşter Otto, 172.
Brăileanu Al., 24, 42, 44, 55, 58, 60, 88.
Branover 25, 30, 74, 91, 109.
Brătăşanu Gh., 28, 121.
Bratu Gh., 2, 23.
Brătescu-Vâlcea M., 24, 58, 59, 70, 74, 91, 122, 151, 152.
Breazu D., 2.
Brodsky I., 110, 140.
Bruno St., 157, 173.
Bugeanu O., Maior, 7, 46, 62, 74, 142.
Buicliu Gh., Lt.-Col., 2, 30, 62, 68, 121, 174, 185.
Buşilă A. A., 10, 11, 25, 44, 56, 58, 59, 72, 88, 91, 105, 122, 131.

Călin I. Aurel, 25, 58.
Calmanovici Savu, 173, 182.
Câlniceanu Valer, 153.
Camerzan O., 108.
Cândea C., 2.
Cândea I., 26, 74, 172, 173.
Cantacuzino I. I., 153, 155, 158.
Căpitan Cornel, 28, 45.
Caraman E., 2.
Cârdei V., 2.
Carp Gh. Jean, 88.
Cârstocea G. N., 74.
Cazacincu V., 91, 92, 122, 123, 126, 141, 151, 152, 153, 155, 157.
Cazacu V., 26, 59.
Cerchez Lucy, 58.
Chivulescu Chivu, 34.
Cilcer Er., 174.
Ciolan St. M., 25, 58, 88, 108.
Ciorănescu N., 4.
Ciorănescu N. I., 38
Ciorănescu I. C., 124, 125, 141, 153, 155, 156, 172, 182.
Ciută Gavril, 26, 70, 72, 74, 76, 87, 90, 91, 106, 110, 122, 124, 125, 137, 141, 152, 155, 156, 172, 173, 182, 184.
Cizmărescu M., 34.
Cocorandu M., 8, 24, 27, 28, 40, 42, 45, 55, 58, 59, 60, 70, 72, 86, 88, 91, 108, 110, 122, 123, 124, 125, 126, 137, 139, 140, 141, 143, 151, 152, 156, 173, 182, 184.
Cocoş Iulian, 173.
Cohen Magdalena, 24.
Cojan Th. C., 74.
Coman A., 2, 39, 40, 76, 107, 126, 142,
Comănescu-Bălteni Al., 123, 141, 153, 154, 155, 172, 173, 182.
Conta V., 7.
Constantinescu E., 29.
Constantinescu I., 44, 59, 60, 70, 88, 91.
Constantinescu N. I., 172, 173.
Constantinescu A. M., 25.
Constantinescu Mircea, 173, 182.
Constantinescu N. N., 125, 126,
Cornăţeanu Gh., 31.
Corneanu P., 34.
Corşoreanu Gh., 29, 110, 124.
Coşereanu I., 8, 10, 12, 25, 29, 30, 40, 42, 44, 45, 46, 55, 57, 58, 60, 61, 62, 74, 78, 86, 87, 88, 91, 92, 104, 105, 107, 110, 121, 123, 126, 141, 151, 152, 153, 154, 159.
Coşniţă V., 157, 158, 173, 174.
Costăchescu Gh., 74.
Costăchescu I., 173, 182.
Cotaru Plutarch, 24, 28, 60.
Cotea Gh., 76, 108, 109, 139.
Crăiceanu Gh., 29, 91, 106.
Crăinicescu Eug., 24, 55.
Creţoiu Anghel, 56, 70, 74, 91, 108, 110, 122, 124, 141, 151, 152, 153, 172, 173, 183.
Cristea Gh. A., 72, 74, 76, 109, 121, 122, 124, 151.
Cristescu I., 2.
Cristescu V., 10.
Cristescu Virgil, 24, 30, 59.
Critz M., 182.

Damşescu A., 30, 173.
Dan V., 24, 59.
Danciu A., 143, 173.
David Gh., 74, 87, 153, 155, 173, 174, 183.
Davidson M., 173.
Derigault A., 34.
Diaconeasa Fl., 74.

Diaconescu N., 2.
Diaconu Gh., 124, 140, 153, 155, 157, 172, 173.
Diaconu D. M., 173.
Dimitoiu M., 74.
Dimitriu Adrian, 25, 29, 45.
Dimitriu-Arad I., 2, 30, 41, 70, 71, 124.
Dobrescu-Băbici, 8, 24, 27, 28, 42, 44, 55, 58, 59, 61, 69, 70, 74, 88, 91, 151, 152.
Dobre V., 110, 124.
Dordea A. Tr., 24, 25, 28, 45, 59, 72.
Dospinoiu N., 8, 26, 29, 42, 44, 45, 55, 74, 77, 88, 90, 91, 92, 93, 106, 108, 109, 122, 123.
Drăgeanu M. M., 110.
Drăghici Aur., 173.
Dragomir N. I., 8, 24, 55, 59, 88, 110, 151.
Dragomirescu-Buzne Ed., 25, 45, 59, 61, 152.
Drogeanu Nic., 124, 125, 173.
Dumitrescu Alex., 110, 123, 124, 175, 184.
Dumitrescu-Furtună, 45.
Dumitrescu Gh., 2.
Dumitrescu I. Gh., 18, 126, 155, 158, 174, 185.
Dumitrescu G. M., 8, 25, 42, 60, 72, 74, 88, 91, 92, 93, 121, 125, 140, 141, 151, 152, 153, 155, 173.
Dumitrescu G. N., 25, 29, 110, 123, 125, 140, 157, 173.
Dumitrescu S. P., 25, 40, 41, 42, 173.
Dumitrescu Savu, 173.
Dumitrescu Sile, 173.
Duțulescu M., 2.
Dvorin L. 26, 45, 74.

Ebner Artur, 124, 153.
Enulescu Ovid, 124.
Epure T. St., 110, 123, 139, 141, 155, 157, 184.
Erder Iosef, 74.

Făcăoaru Gh., 74.
Fântâneanu I., 184.
Fenețean Iancu, 141, 174.
Flickstein I., 8, 24, 25, 28, 30, 56, 60, 77, 88, 91, 155, 173, 182, 185.
Florescu B. I., 21.
Focșeneanu I. M., 8, 10, 41, 44, 56, 58, 59, 60, 88.

Gabrielescu V., 8, 25, 29, 42, 44, 60, 70, 71, 74, 79, 86, 88, 91, 106, 110, 122, 124, 126, 139, 140, 151, 152, 173, 184.
Gaef G., 25, 58.
Galescu Th., 123.
Gârleșteanu M., 173, 182, 184.
Georgescu C., 25, 28, 40, 70, 72, 75, 76, 90, 91, 108, 109, 121, 122, 123, 124, 140, 150, 152, 153.
Georgescu D., 2.
Georgescu Er. Fl., 8, 25, 26, 42, 44, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 70, 71, 72, 86, 88, 91, 92, 94, 107, 122, 151.
Georgescu Grig., 74.
Georgescu-Gorjan St., 21.
Georgescu C. I., 25, 59, 60, 77, 93.
Georgescu-Val I. N., 8, 10, 11, 12, 14, 23, 25, 27, 28, 44, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 69, 71, 72, 75, 77, 86, 88, 90, 91, 93, 105, 107, 109, 110, 122, 123, 124, 126, 137, 139, 140, 141, 151, 152, 153, 154, 155, 157, 172, 174, 182, 184.
Georgescu-Roegen, 44, 86, 104.
Georgescu T., 10, 25, 61.
Ghelber M., 110, 122, 123, 124, 125, 141, 154, 155, 173, 185.
Gheorghiu C., 110, 123, 124, 125, 140, 141, 152, 154, 155, 157, 173.
Gheorghiu Gh. L., 10, 26, 28, 61, 88, 91, 105, 106, 108, 143.
Gheorghiu Olimpia, 74, 125, 152, 172, 173, 182.
Gheorghiu A. Șerban, 30, 121.
Gherman C., 74.
Ghermănescu M., 69, 98, 104, 115, 130, 146, 162.
Ghidalisohn I., 45, 74, 92, 109.
Ghilezan Moise, 173.
Chițescu Virgil, 10, 25, 29, 30, 42, 44, 45, 56, 58, 69, 70, 74, 88, 91, 92, 105, 109, 122, 151, 15.
Giotta V., 88, 93, 123, 154, 173, 182.
Gogălniceanu M. M., 8, 25, 88, 122.
Goilav Cr., 8, 25, 41, 42, 44, 55, 88.
Golcea Cornel, 28, 71, 74.
Goldenberg I., 28, 29, 45, 72, 74, 88, 106, 151.
Goldstein I., 28, 91, 93, 106, 123, 125, 173.
Golopența Anton, 173.
Gorciu Gh., V., 74.
Grabovschi Eug., 45, 77, 91, 124, 126, 140, 155, 173.
Grady I. Gh., 155, 173, 182.
Grigore Virgil, 28.
Grigorescu I., 93, 110, 123, 153, 155. 157, 173, 182.
Grigorescu Pomp., 74.
Grofșorean I. Gh., 25, 30, 42, 45, 55, 60, 61, 70, 72, 74, 77, 91, 93, 107, 108, 110, 122, 123, 124, 125, 126, 141, 151, 153, 155, 156, 172, 173, 182.
Grosu I., 74, 152.
Grünberg H., 26, 45, 56, 58, 59. 72, 74, 88, 109, 151.
Grünfeld Max. 25, 42, 45, 60, 71, 72, 74, 86, 88.

Haimovici S., 25, 45, 56, 72, 74, 88, 151, 152.
Haldner M., 74.
Hâlmu V., 28, 45.
Harnagea J., 110, 123, 125, 140, 153, 155.
Harth Ev.. 25, 55, 88.
Hartular Gh., 125, 155, 185.
Hermann A., 173, 182.
Herșcovici Em., 26, 45, 56, 58, 59, 72, 74, 88, 91, 108, 109, 151, 152, 157, 184.
Horwath P., 153, 155.
Hotăran Th., 173.
Hrysanidi D., 41.
Hubert M., 34.
Huțanu C., 76.

Iliescu D., 45, 54, 55, 74, 91, 92, 123, 139, 153, 157, 173.
Iliescu E., 8, 25, 28, 29, 42, 44, 58, 60, 76, 86, 88, 122, 126, 139, 140, 151, 153, 155, 173.
Iliescu D. Gr., 155.
Iliescu I. I., 56, 91.
Iliescu Mircea, 126, 173.
Iliescu Th. Th., 45, 74. 77, 91, 93, 110, 124, 140, 153, 173, 182.
Iliescu St. V., 74, 173.
Ionescu-Brezuică, I., 14, 28, 42, 72, 74, 88, 91, 108, 151, 152.
Ionescu Bujor, 173.
Ionescu Carol, 25, 44, 45, 70, 88, 124.
Ionescu Const., 25, 74, 88.
Ionescu K. C., 2.
Ionescu B. Ion, 29, 45, 56, 58, 59, 72, 74, 91, 151, 152.
Ionescu I. Ilie, 24, 25, 44, 55, 58, 59, 61, 86.
Ionescu I. Longin, 25, 44, 55, 58, 61, 72, 87, 88, 152.
Ionescu V. Gh., 45, 74.
Ionescu I. M., 70.
Ionescu I. Niculae, 25, 74, 124.
Ionescu Nicu, 157, 173.
Ionescu Paul, 110, 124, 126, 140, 141, 151, 152, 153, 155, 156, 157, 173, 182.
Ionescu D. V., 46, 94.
Ioniță M. Ion, 25, 58, 61, 72, 86, 88, 91,
Iordache N. I., 8, 25, 28, 29, 41, 45, 55, 58, 59, 60, 61, 72, 74, 91, 121, 151.
Iscovici I. I., 28, 29, 55, 70, 74, 172, 184.
Ivanovici S. T., 21.

Jacovache I., 125, 173.
Jecu M. I., 178.
Jojea Nic., 173, 182.
Julian Em., 153, 155, 173.

Katz P., 8, 12, 14, 24, 25, 28, 29, 40, 44, 45, 55, 58, 59, 60, 70, 71, 72, 74, 76, 77, 86, 88, 91, 93, 106, 108, 110, 122, 123, 124, 126, 137, 139, 140, 141, 151, 152, 153, 154, 155, 157, 172, 173, 182, 184.
Kassargian A., 25, 45, 58, 173.
Kaufman N., 168.
Kertesz P., 124.
Klein S. 25, 28, 29, 45, 55, 59, 70, 72, 74, 77, 88, 91, 93, 151, 152, 153, 155.

Lalescu Tr., 2, 7, 21, 31, 35, 69, 83, 94, 105, 126, 137, 168, 172, 185.
Landes F., 45, 124.
Lăzărescu Th. J., 8, 25, 28, 56, 58, 59, 60, 70.
Lăzărescu Fl. St., 8, 10, 25, 27, 29, 41, 57, 58, 59, 71, 74, 86, 91, 93, 105, 108, 110, 121, 122, 124, 125, 151, 152, 155.

Lăzărescu V., 173.
Lelescu Luciliu, 91, 105.
Lichtenberg D., 26, 56, 58, 74.
Lindenberg Lionel, 45, 74.
Linteș I., Căptian, 14, 34, 46, 69, 121, 122, 126, 137, 153.
Liteanu Gh., Lt.-Col., 2.
Liuba Gh., 45, 58, 61, 72, 74, 123, 125, 173, 182.
Longinescu N. Abel, 74, 151.
Lupan A., 34.
Lupșa E., 70,

Macri Socrat, 25, 70, 74.
Macrineanu St., 29, 58, 71, 74, 77, 91, 92, 108, 124, 153.
Manughevici C., 2.
Manoilescu Const., 74.
Mărculescu B. Gh., 41.
Mardan D., 2.
Mareș Corneliu, 60, 61, 88,
Marian S., 155, 184.
Mărienuț Uroș, 93, 123.
Marinescu I. Aristide, 45, 70.
Marinescu I. Gh., 28, 87.
Marinescu M. Ion, 41, 55, 60, 72, 74, 77, 88, 91, 93, 110, 123, 124, 140, 141, 151, 152, 153, 154.
Măru D-tru, 10, 25, 28, 29, 45, 56, 60, 70, 86, 88, 91, 106, 143.
Mateescu Gh., 25, 28, 45, 56, 58, 59, 70, 74, 88, 91, 105, 109, 122, 151, 152,
Mehlmann Th., 8, 25, 27, 28, 29, 45, 55, 59, 60, 70, 88, 90, 91, 93, 108, 121, 122, 123, 125, 139, 141, 151, 152, 153, 156.
Meirovici, J., 45, 91.
Menciu C., 93.
Mendel Cr., 173.
Miclescu A., 8, 25, 27, 28, 42, 56, 58, 61, 74, 75, 77, 86, 88, 91, 106, 110, 121, 122, 123, 124, 139, 140, 141, 152, 153, 154, 155.
Mihăescu C. C., 8.
Mihăescu D. C., 10, 25, 28, 55, 57, 58, 60, 70, 74, 88, 90, 92, 106, 109, 121, 122, 142, 152.
Mihai St. Grig., 45.
Mihai Vasile, 45.
Mihailescu Romeo 110, 124, 125, 139, 141, 155, 157, 172, 173, 182, 185.
Mihailescu St., 21.
Mihaly El., 2.
Mircea Adrian, 45.
Mirescu P., 75, 122, 151, 156, 173, 182.
Mironovici Virginia. 157, 173.
Mitescu D., 74, 92, 153, 173.
Mititelu Gh., 172.
Mitran St. Gr., 25, 88, 173.
Mocanu N. Aurel, 59.
Moisil G., 40.
Moroianu Ath., 26, 42, 44, 58, 152, 153.
Morway C., 24.
Murariu P., 25.
Munteanu Gh., 74.
Musta St., 25, 28, 75, 88, 106, 109, 126, 141, 155, 157, 172, 183.
Muzicescu N., 2.

Naghita D., 153.
Negrețu Fl., 8, 24, 25, 27, 29, 30, 42, 56, 58, 59, 61, 74, 75, 86, 88, 91, 92, 106, 108.
Negroiu Pascu, 74, 140.
Neștianu Gh., 8, 25, 29, 42, 45, 72, 74, 92, 105, 172, 173, 182.
Nichifor Gh., 2.
Nicolas P., 137.
Nicolau Aurel, 173.
Nicolau Gh. A., 25.
Nicolau Th. A., 23, 42, 56.
Nicolau Gh. C., 25, 70, 125, 152, 155, 173.
Nicolau P. Hristodor, 45, 74, 125, 173. 182.
Nicolau M. Iulian, 25, 44, 60, 61, 86.
Nicolau Vasile, 155.
Nicolescu Angelo, 74, 92, 153.
Nicolescu Isaiia, 30, 92, 126, 153, 155, 156, 157, 173, 185.
Nicolescu P. Vasile, 74, 123, 124, 139, 153, 173.
Niculescu Alex., 8, 19, 28, 29, 42, 44, 45, 60, 81, 105, 108, 136, 139, 151.
Niculescu Const., 110.
Niculescu I., 28.
Niculescu Miron, 12, 26.
Niculescu Vasile, 42.
Noaghea G., 2.

Onicescu O., 137.
Onițiu Fl., 74, 185.
Oprișean Gh. E., 10, 13, 25, 44, 45, 59, 74, 88, 91, 106, 122, 151, 152.
Orășanu C., 2.
Orășanu Gr., 18.
Orbonaș Iuliu, 28, 71, 74, 88, 142, 173

Pamula Alex., 8, 28, 30, 60, 70, 88, 91, 106, 125, 155, 172.
Panait T., 45, 88.
Panaitescu Al., 157, 172.
Panaitescu D., 39.
Pănescu C. I. 182.
Pantazi G. D., 30, 74, 110, 173, 182.
Pârâianu N., 8, 25, 27, 42, 44, 45, 55, 56, 60, 86, 88.
Pârvulescu Titus, 25, 155, 173.
Pătroianu M., 25, 74, 92, 124, 151, 155, 173.
Pătrulian N., 74, 110, 173.
Pâslea Viorica, 25.
Percea Viorel, 45, 71, 74, 76, 110, 152, 154, 173, 184.
Petrescu A., 2.
Petrescu Cernea, 25, 88.
Petrescu A. Gh., 173.
Petricoane D. M., 2.
Pinchis M., 25, 28, 29, 45, 59, 60, 88.
Pitea T. D., 10, 30, 45, 70.
Pollak A., 27, 88.
Pompei D., 137, 168.
Pop I. Emilian, 153, 155, 173, 182.
Pop Filip, 99.
Popa P. Nic., 110, 123, 124, 154.
Popa I. Teodor, 44.
Popea Ov., 25, 29, 44, 45, 61, 72, 74, 77, 78, 88, 90, 92, 93, 121, 122, 124, 142, 151, 152.
Popeanu Gh. A., 10, 11, 12, 28, 40, 44, 56, 74, 174.
Popescu G. A., 45, 70, 74. 173.
Popescu N. Cornel, 29, 42, 110, 141, 153, 155, 172, 173, 182.
Popescu Epaminonda, 74.
Popescu Gh. Florin, 110, 141, 157.
Popescu Grig., 74, 122, 124, 172, 173.
Popescu Iancu, 45, 74, 76, 91, 108, 109, 124, 139.
Popescu D. M., 141, 155, 157, 173.
Popescu N. N., 25, 45, 87, 151, 152, 173, 182, 184, 185.
Popescu N. St., 44, 56, 58, 60.
Popovici Gh. A., 26, 58, 124.
Popovici P. Dan, 25, 28, 70, 72, 74, 77, 92, 110, 122, 123, 140, 141, 153, 173, 183.
Popovici Cr. Ion, 25, 28, 30, 45, 74, 88, 92, 109, 126, 141, 155, 172, 173, 182.
Popovici Th. Ion, 29, 42, 45, 58, 59, 69, 72, 74, 77, 88, 91, 92, 93, 105, 107, 110, 121, 123, 125, 137, 140, 141, 151, 152, 153, 154, 156, 171, 172, 173, 174, 182, 184.
Popovici M. Iulian, 125.
Popovici Mircea, 74.
Popovici Tib., 8 10, 12, 14, 23, 25, 27, 30, 32, 44, 55, 56, 58, 60, 61, 76, 77, 88, 90, 91, 93, 104, 104, 106, 108, 121, 151, 152, 168, 174, 175.
Popper Er., 173, 183.
Postale Mihai, 74,
Proca A., 7.
Propst J., 25, 44, 58, 59, 143, 153, 173, 182.
Protopopescu I., 178, 182.
Purcariu Ilie, 18.

Rabinovici T., 153.
Racoviță D., 74.
Rădulescu P. Marin, 74, 92, 93, 123, 124, 140, 153, 155, 173, 182.
Rădulescu P. Stelian, 25, 58, 60, 74, 92, 110, 123, 125, 140, 153, 155, 157,
Rădulescu Titu, 93, 153, 155, 172.
Rădulet Remus, 77, 123, 125, 155, 157, 173, 184.
Rădvan Fl., 74.
Râmniceanu L. R., 74, 108, 173.
Răuț C., 8, 25, 28, 29, 30, 72, 88, 92, 93, 124, 151, 153.
Rigani Cr., 25, 57, 58, 60, 74, 76, 77, 93, 107, 122, 125, 151.
Ristea M., 25, 58, 61, 151, 152.
Rizescu I., 41, 44.
Roibănescu C., 2.
Röder C., 29, 92, 106.
Ropcean I., 173.
Roșca H., 69.
Roșețel Boju, 25, 69, 91, 173, 184.
Roșianu R., 173.
Rothemberg M., 74, 93.
Rubinstein M., 45, 58, 74, 109.
Runcan V., 25, 29.
Rusescu C., 28, 61.

Saegiu E., 2.
Samoilă D., 25, 45, 55, 58, 74, 91, 121, 125, 141, 151, 152,, 172, 173, 182, 185.
Săndulescu C., 28.
Sarian M., 11, 58.
Săvescu M., 142.
Schileru C. Dili, 13, 28, 29, 59, 61, 70, 88, 143, 158, 166, 168.
Schönfeld Conrad, 58, 88.
Schmautz O., 150.
Scodreanu A., 13, 25, 27, 30, 44, 55, 58, 60, 72, 74, 75, 88, 91, 104, 106.
Scorușianu Emil, 56, 58.
Scripcă Laur, 26, 58, 74, 125, 126, 139, 173.
Segall Lipa, 34.
Segărceanu N., 45.
Septelici Raul, 8, 28, 45, 61, 70, 74, 75, 88, 92, 106.
Șerban I. T., 154, 173, 182.
Șerbănescu M. I., 8, 44, 58, 60, 110.
Șerghiev A. I., 153, 155, 185.
Sergescu P., 2, 7, 86, 168.
Severineanu C., 34.
Silion Gh. I., 24, 25, 27, 28, 40, 42, 44, 55, 58, 60, 71, 72, 74, 86, 88, 91, 92, 108, 151, 152, 153, 155, 157, 173, 183, 185.
Simionescu Gh., 93, 110, 125, 140, 155, 156, 157, 157, 171, 173, 182, 185.
Simniceanu S., 2.
Singer I., 74.
Singer Bella, 125, 141, 173.
Smighelschi O., 28, 143, 172.
Socianu V. E., 40,
Solacolu Mircea, 45, 70, 71, 107, 151.
Solacolu M. Tr., 28, 58, 60, 88.
Solacolu Șerban, 27, 59, 71, 72, 74, 92, 106, 109, 121, 123, 140, 141, 153, 157, 172, 182.
Solomon N., 25, 29, 71, 74, 91, 92, 93, 110, 123, 125, 143, 152, 153, 154, 155, 173.
Solomon W., 8, 42, 71, 77, 88, 93, 123.
Spineanu C., 2.
Sperchez Zeno, 173.
Stamatiu M., 25, 28, 45, 58, 59, 70, 71. 72, 74, 88, 108, 121, 122, 123, 125, 141, 151, 152, 154, 155, 157, 172, 173, 182, 183, 184.
Stamatescu V., 172, 173, 184.
Stambuleanu A., 74, 77, 91, 107, 1 3, 152, 154, 157, 172, 173, 183.
Stăncescu C., 2, 46.
Stănculescu I. C., 74, 78, 94, 122, 123, 125, 126, 141, 154, 155, 172, 173, 183.
Stănculescu A. Gh., 27, 110, 125, 126 153, 175, 183.
Stănescu D., 10, 25, 55, 58, 88, 125, 141. 155, 173.
Stănescu B. Gh., 125.
Stănescu Mircea, 45.
Stănescu A. Nic., 74, 91, 141, 143, 151, 152, 155, 156, 157, 173, 174, 184, 185.
Stănescu Panait, 74.
Stănciulescu A. Gh., 24, 25, 28, 29, 58, 59, 88, 93, 123, 172, 184.
Stavilă Th., 74.
Stavrache C., 45.
Ștefănescu C., 2.
Ștefănescu Emil, 8, 14, 24, 25, 28, 30, 42, 44, 45, 46, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 71, 72, 74, 75, 76, 78, 88, 92, 94, 107, 109, 110, 121, 123, 125. 126, 139, 140, 141, 142, 151, 152, 153, 154, 155, 157, 168, 172, 174, 185.
Steinbach Marcel, 45.
Stoenescu I. Alex., 12, 14, 15, 27, 55, 88.
Stoenescu Al. I., 8, 14, 15, 24, 25, 26, 38, 42, 44, 54, 61, 69, 85, 87, 100, 119, 152, 163.
Stoenescu C. I., 26, 59, 61, 74, 77, 109, 127.
Stoenescu Gh., 74, 92, 153.
Stratulat I., 106, 143.
Stroescu Gh., 92, 123, 153, 155, 157, 173,
Stoicescu M. G., 2.
Sudan C., 2.
Sufletel A., 45, 59, 61, 88.
Suselescu I., 153, 155, 173.

Tănțăreanu A., 25.
Tărăbuță P., 74, 106, 108, 110, 122, 123, 125, 139, 141, 151, 152, 153, 154, 155, 157, 172, 173, 183, 184.
Taroș V., 173, 183.
Tauber A., 8, 25, 28, 30, 42, 44, 45, 55, 59, 60, 69, 70 72, 74, 77, 88, 91, 93, 106, 109, 110, 121, 123, 126, 139, 140, 141, 151, 152, 153, 155, 156, 157, 172, 173, 183, 185.
Teodorescu Anton, 74.
Teodorescu C. C., 2, 14, 15, 18, 34, 46, 50, 63, 66, 81, 98, 114, 130, 146, 162, 175, 178,
Teodorescu M D., 157, 172, 183.
Teodorescu Florin, 74, 92, 153.
Teodorescu St. I., 8, 13, 25, 44, 58, 74, 184, 185.
Teodorescu C. M., 173, 183.
Teodoru Nicuță, 8, 25, 42, 59.
Teodosiu Avram, 98, 130, 144, 146, 162.
Tepeneag E., 2.
Terescenco N., 25.
Terfeleag Olga, 183.
Theodoridis Th, 25.
Thierrin G, 2.
Timotin D., 10, 25, 55.
Tino .O, 98, 114, 130, 146, 162.
Tintă Elena 74, 125.
Țiriac St., 72, 74.
Țițeica Gh., 55, 168.
Tomescu Gh., 75, 93, 122, 123, 125, 141, 153, 155, 172, 173, 183.
Tonea Nic., 74, 92.
Trincă D. M., 25.
Tuducescu A. N., 25, 28, 58, 88.
Tunaru R. Tr., 25.

Udrisky Tr., 44, 45, 62, 74, 106, 110, 122 125, 126, 141, 151, 152, 153, 157, 173, 174, 183.
Ulman O., 8, 25, 28, 42, 44, 61, 88, 104.
Ursescu C. Gh., 74.
Urzică A., 28, 69, 71, 74, 75, 77, 88, 151, 153.

Vâlcovici V., 2, 46, 51, 62, 166, 174, 175.
Vasilescu I. D., 88.
Vasilescu A. M., 74, 93, 110, 121, 124, 125, 155, 157, 173.
Vasilescu C. Virgil, 10, 12, 13, 25, 27, 55, 61, 86, 88.
Vasiliu Gh., 34, 155.
Vasiliu C. I., 58, 93, 94, 110, 123, 125, 140, 141, 152, 153, 155, 156, 157, 172, 173, 183.
Vasiliu Mihai, 2, 69, 88, 142, 150, 185.
Vasiliu V., 155.
Vasilovici D., 21.
Vătășan Ovid, 30, 91, 110, 170, 184.
Vernescu Ernest, 74.
Vicoveanu C. V., 8, 40.
Vișoianu I. I. 153, 155.
Vlad Oct., 93, 140, 153, 155.
Vlad I. V., 2.
Vlădoianu Tib., 155.
Vlăduță Sabin, 155, 173.
Voiculescu M., 173.
Vulpe Tib., 25, 45.
Vulpescu Ioan, 74.

Wagner W. I., 125.
Weiss L., 8, 25, 28, 30, 44, 45, 58, 59, 70, 71, 72, 74, 77, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 107, 108, 109, 120, 121, 122, 125, 139, 140, 151, 152, 153.
Weiss S., 29, 42, 74, 87, 88, 90, 92, 106, 123, 140, 141, 151 153, 154, 155, 156, 157, 183.
Weissemberg E., 45, 56, 74.
Weissler D., 26, 45.
Wetter Ana, 25, 45, 93, 125, 126, 141. 183.
Witzmann Marcu, 25, 45, 56, 74, 88, 90, 121, 151, 152.

Zaharia Emil, 143.
Zaider M., 88.
Zaman Gianino, 153.
Zană D., 123, 125.
Zanfirescu Al., 45, 110, 125, 140.
Zanfirescu Andrei, 45.
Zapan Grig., Căpit., 18, 46, 55, 62, 71, 78, 139, 155, 157.
Zăvoicea V., 31.
Zoican A., 184.
Zuckermann D. M., 29, 92, 106, 107.

BIBLIOTECA ASTRA
SIBIU

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

5 lei